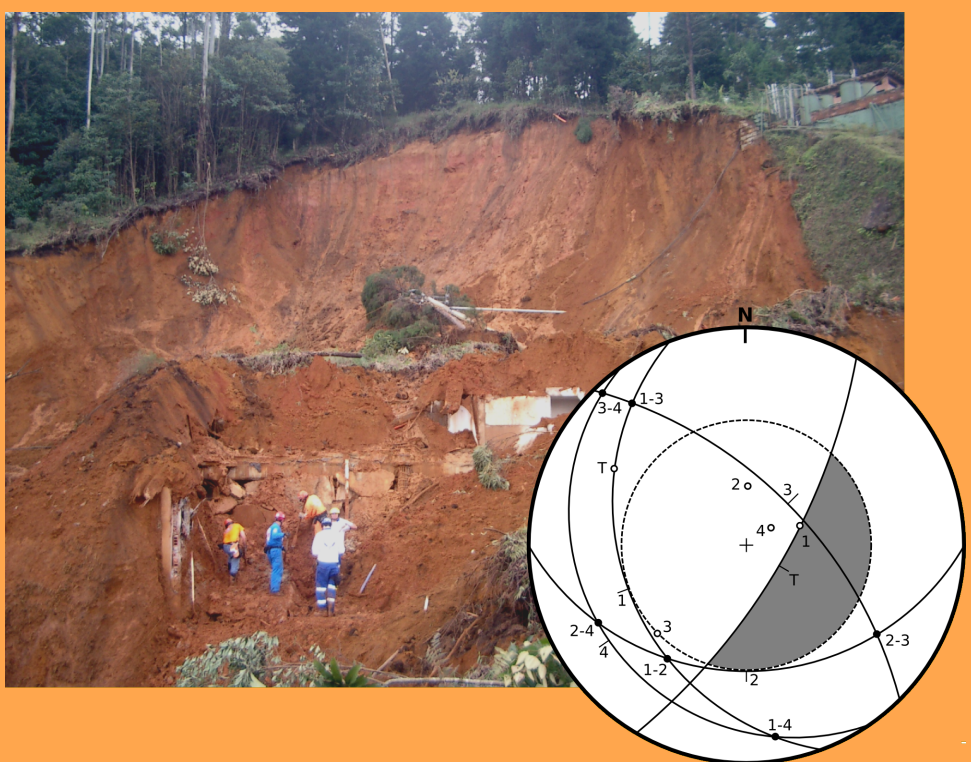
Ludger O. Suárez-Burgoa

Análisis de ESTABILIDAD DE TALUDES

CON APLICACIONES EN MATLAB®

Primera Edición



JULIO, 2016

El Autor – Medellín

Los nombres de compañías y productos mencionados en este libro son marcas corporativas o registradas de sus respectivos dueños.

©Copyright 2016 L.O. Suárez-Burgoa.

Todos los derechos reservados. Ninguna parte de esta publicación impresa puede ser reproducida, guardada en un sistema de almacenamiento o transmitida en alguna forma o por cualquier medio sea electrónico, mecánico, fotocopia, gravado, duplicado u otro; sin recibir una licencia por parte del dueño de los derechos. Se ruega contactar con los directos dueños que se listan en los agradecimientos para el material que no pertenece al editor de este libro para la solicitud de las licencias.

Descripción catalográfica

Título:	Análisis de estabilidad de taludes
Subtítulo:	Con aplicaciones de MATLAB
Edición:	primera
Editorial:	independiente, por el autor
Características:	21 cm × 28 cm, 167 pp., 54 il., español, 2016
Subárea:	624.151 Ingeniería geológica
Autor(es):	Suárez Burgoa, Ludger Oswaldo (Bolivia), 1975–

Publicado por el autor

Calle 65B N° 80A-91, apto. 216
Robledo Minas, Medellín
Colombia (Sudamérica)

Email:	ludger.suarez.burgoa@gmail.com
Página Web:	www.geomecanica.org

Cubierta

Diseño: L.O. Suárez-Burgoa. Foto frontal: Edier V. Aristizabal Giraldo , Deslizamiento rotacional en el Municipio de Sabaneta, 2009.

Edición

Diseño de la cobertura, edición, diseño y diagramación del cuerpo, índice temático, composición tipográfica, corrección gramatical y ortográfica por L.O. Suárez-Burgoa.

A la infinidad del universo.

Prefacio

Desde hace 60 años el análisis de *estabilidad de taludes* ha tomado en cuenta taludes finitos que fallan con una superficie circular y plana en suelos clásicos (suelos transportados) bajo un análisis continuo; y en macizos rocosos con discontinuidades altamente persistentes: sea macizos con pocas discontinuidades (*i.e.* máximo cuatro familias de discontinuidades) para encarar un análisis en el medio discontinuo, o macizos con muchas familias de discontinuidades (*i.e.* más de ocho familias de discontinuidades) para encarar un análisis en el medio continuo.

En los dos tipos de materiales geológicos nombrados, suelos transportados y macizos rocosos, el análisis clásico se realiza de forma aproximada pero numérica bajo el marco del concepto mecánico de *equilibrio límite*, en dos dimensiones, y bajo el concepto de *factor de seguridad global*.

Para enfrentarse al rápido crecimiento de las ciudades y conurbaciones de América Latina se construyó muchos taludes en los últimos 60 años. Las colinas naturales se transformaron en áreas residenciales y comerciales. En la mayoría de los centros urbanos de América Latina se tiene un paisaje montañoso con un alto desarrollo humano, especialmente por la presencia de la cordillera de los Andes que se desarrolla del extremo sur al norte a lo largo de toda la costa occidental del continente; muchos de ellos en climas extremos: desiertos y sitios de alta precipitación.

De este modo, la estabilidad de taludes naturales y construidos se ha convertido en una de las mayores preocupaciones de las autoridades municipales y departamentales, y en la actividad más solicitada a resolver por los ingenieros geotecnistas.

Un abordaje clásico, simplista, rápido y económico del análisis de estabilidad de un talud es todavía una inicial alternativa para una posterior programación de proyectos geotécnicos más refinados y sofisticados. Pero este tipo de análisis inicial no sería en la actualidad tan útil si no se tuviera herramientas expeditas de cálculo como son los programas, rutinas y funciones desarrollados en código abierto.

El presente libro pretende dar al lector las capacidades de análisis de equilibrio límite clásico en dos dimensiones en rocas y suelos a través de la solución de problemas y cálculos

numéricos con un lenguaje de programación intérprete y de prototipaje muy bueno como lo es MATLAB®. Esto desarrollará mayores aptitudes, destrezas e independencia de análisis en situaciones particulares y poco comunes que se tiene muy a menudo en la práctica de análisis de estabilidad de taludes. Todos los listados de los códigos, funciones nuevas aquí desarrollados son libres para el uso, según los términos de la licencia abierta BSD (`http://opensource.org/licenses/bsd-license.php`). Los comentarios y las salidas literarias dentro de los códigos fueron escritas en idioma Inglés, esto con el fin de respetar la norma de desarrollo de códigos que exige ese idioma como forma de comunicación. Asimismo, el texto tiene licencia *Creative Commons*.

Estoy muy agradecido con los estudiantes de las materias de Estabilidad de Laderas, pregrado y postgrado de la Universidad Nacional de Colombia (sede Medellín), que aportaron mucho con la lectura y corrección del presente libro. Sus inquietudes, dudas y preguntas siempre han servido para darle mejor material al presente texto.

En este libro se emplearon siglas o acrónimos, derivados del idioma inglés, ya que éstos son estandarizados y de uso internacional. Otros son particulares de este libro, que tienen el objetivo de evitar la repetición extensa de un mismo término. También se usaron las abreviaciones *i.e.* y *e.g.* referentes a las palabras en latín *it est* y *expendi gratia*, respectivamente; para aclarar o ejemplificar algún término u oración.

Hoy en día tenemos acceso a una gran cantidad de libros, y de los temas diversos que imaginemos y deseemos abordar; libros que pueden ser del pasado, o aquellos que apenas están saliendo del proceso de edición. Si no se tiene en formato electrónico de libre descarga por la red es posible adquirirlos en formato físico sea a través de las principales bibliotecas de la ciudad o de los sitios de compra de internet. De todos modos, el texto que uno desee estará en menos de un mes disponible para su lectura.

Es tanta la disponibilidad de información de la actualidad que ahora sólo existe la *falta de tiempo* para cubrir con la lectura de al menos un tema que uno desee entender o profundizar. Se calculó, que en menos de 20 años (a partir del ahora, año 2015), la totalidad de los libros estarán disponibles por la red Internet; y eso es muy factible incluso en menos años, porque de hace 5 años para acá se nota claramente que encontrar un texto y adquirirlo de forma legal (sea muy antiguo o muy reciente) es mucho más fácil.

Por estas condiciones, hoy en día, escribir un libro ya no es un negocio para el autor; es más, ni siquiera es una herramienta que permitirá al autor ganar prestigio o reconocimiento académico ni social. El escribir textos se ha convertido en un *hobbie* de querer transmitir una estructura de pensamiento del autor para el lector. La competencia es dura en el mundo de la lectura, por eso es un lujo para el autor que tenga al menos unos cuantos lectores de sus escritos.

De este modo, el motivo de escribir este libro fue más de hacerle notar al lector que él es capaz de resolver estos problemas de análisis con el uso de su buen criterio y sus capacidades de programación; espero lo disfruten.

También informo en este prefacio, que todas la unidades empleadas en el libro están de acuerdo al Sistema Internacional de Unidades (SI) basados en un sistema de dimensiones [longitud]= metro, [fuerza]= newton y [tiempo]= segundo, donde se asume que la acelera-

ción de la gravedad (g) es una constante de valor igual a 9,81 $m\,s^{-2}$. Excepciones se tienen en la dimensión del [ángulo plano], que se emplea aquí el grado en vez del radian, y en ciertas ecuaciones empíricas donde las dimensiones fueron planteadas por sus respectivos autores en el sistema de unidades Inglés/Americano.

La dimensión más empleada en este libro es la del esfuerzo mecánico, que en el SI y para uso de la mecánica de macizos rocosos es el *megapascal* (MPa). Un megapascal es igual a un millón de veces el esfuerzo producido por la acción de una fuerza de 1 N sobre un área de 1 m^2 de superficie, equivalente en forma aproximada a una presión de columna de agua de 100 m o a 37 m de sobrecapa de material rocoso. Los signos positivos y negativos adoptados para los esfuerzos y deformaciones son el de compresión y contracción (i.e. acortamiento), respectivamente (i.e. convención de signos de las ciencias geológicas).

Las conversiones útiles son:

$1\,MPa = 10^6\,N\,m^{-2}$
$0{,}001\,MPa = 1\,kPa = 20{,}9\,lb\,ft^{-2}$
$1\,MPa = 10\,bar = 10{,}2\,kg\,cm^{-2} = 145\,lb\,in^{-2}$
$100\,MPa = 1\,kbar = 6{,}47\,ton\,in^{-2}$
$1\,J\,m^{-2} = 1000\,erg\,cm^{-2}$

Si el lector desea profundizar más en cualquier tema del presente libro, podrá consultar las innumerables referencias citadas en el mismo.

Finalmente comentar que este libro fue editado y compilado en LaTeX2ε con algoritmo de separación de palabras del idioma español desarrollado por el proyecto CervanTeX. Muchas veces por ser éste un proceso automático pueden existir algunas omisiones a las reglas de la gramática española o al sentido común.

Se espera que el presente libro sea de gran utilidad para el público lector y que su impacto sea positivo y duradero.

Medellín,
julio de 2016 *Ludger O. Suárez-Burgoa*

Índice general

1. Generalidades en la estabilidad de taludes 1
1.1. Factor de seguridad global 2
1.2. El rol de la fase líquida 3
1.3. El rol de la vegetación 4
1.4. Criterios de ruptura por el macizo 7
1.4.1. Criterio de ruptura de Mohr-Coulomb 7
1.4.2. Criterio de ruptura de Hoek-Brown 9
1.5. Criterios de ruptura por la discontinuidad 16
1.5.1. Criterio de ruptura de Patton-Goldstein 16
1.5.2. Criterio de ruptura de Barton-Choubey 18
Lista de ejercicios 21

2. Análisis de estabilidad en suelos 22
2.1. Método de equilibrio límite para rupturas planas 24
2.1.1. Talud seco en material incohesivo 24
2.1.2. Talud saturado en material incohesivo 25
2.1.3. Talud saturado indrenado 25
2.1.4. Talud con nivel freático debajo de la superficie del terreno 26
2.1.5. Relación presión intersticial *v.s.* esfuerzo total vertical 28
2.1.6. Ábacos del cálculo 30
2.1.7. Influencia de flujo hidráulico 33
2.1.8. Influencia de la vegetación y árboles 36
2.1.9. Carga horizontal sísmica semiestática 38
2.1.10. Casos especiales de cargas 38
2.2. Método de equilibrio límite para rupturas curvas 40
2.2.1. Análisis de ruptura circular en condiciones indrenadas 44
2.2.2. Análisis de ruptura circular en condiciones drenadas 45
2.3. La superficie de ruptura crítica 53

Lista de ejercicios 55

3. Análisis de estabilidad en macizos rocosos 62
3.1. Ruptura plana 62
3.1.1. Método cinemático 64
3.1.2. Método de equilibrio límite, modelo bidimensional 67
3.2. Ruptura de cuña 76
3.2.1. Método cinemático 76
3.3. Ruptura por volteo 81
3.3.1. Método cinemático 81
3.3.2. Método de las vigas empotradas superpuestas 85
3.4. Ruptura circular 87
3.5. Caída de rocas 89
3.5.1. Movimiento libre de una roca 92
3.5.2. Impacto y rebote de una roca 95
3.5.3. Deslizamiento de una roca 98
3.5.4. Rodaje de una roca 98
3.5.5. Deslizamiento y rodaje de una roca 99
3.5.6. Teorema de la energía cinética para deslizamiento y rodaje 100
3.5.7. Algoritmo del sitio de impacto 101
3.5.8. El coeficiente de restitución 101
Lista de ejercicios 105

4. Análisis probabilista 111
4.1. Aplicaciones generales del MC 112
4.2. Aplicaciones del MC a la estabilidad de taludes 115
4.2.1. Distribución uniforme 116
4.2.2. Distribución triangular 117
4.2.3. Distribución normal 120
4.2.4. Distribución lognormal 120
4.2.5. Distribución beta 120
4.3. El programa OpenLISA para ruptura plana 126
Lista de ejercicios 132

Referencias 135

Proyección esférica estereográfica 141
A.1. Reseña histórica 142
A.2. La traza de un plano 144
A.2.1. Primer procedimiento 144
A.2.2. Segundo procedimiento 144
A.3. El polo de un plano 146

A.4. El círculo de ϕ grados de radio concéntrico al círculo mayor 147

Índice alfabético 153

Índice de figuras

1.1. Influencia de la presión intersticial en los esfuerzos efectivos y totales en función del tiempo. 5
1.2. Relación de escala del segundo esquema estándar del *Gsi*. 15
1.3. Esquema de la envolvente de Patton-Goldstein. 18

2.1. Esquema de la delimitación de un talud seco en arena. 25
2.2. Ábacos para el cálculo de f_s a cuatro diferentes valores de r_u [29]. 31
2.3. Terraplén donde se puede aplicar el modelo de talud infinito. 34
2.4. Carga horizontal sísmica semi-éstática. 39
2.5. Cargas estabilizantes y des-estabilizantes en la dovela. 40
2.6. Clasificación de los métodos de cálculo bidimensionales de estabilidad de taludes 41
2.7. Esquema clave para el análisis de esfuerzos totales de un talud al asumir un deslizamiento circular por el método de las dovelas. 44
2.8. Figura para el Ejercicio 2.5 45
2.9. Esquema de la definición para el análisis de esfuerzos efectivos en un talud, método de las dovelas. 47
2.10. Ábaco de los valores $m_{ff} = \cos\alpha \left[1 + \left(\tan\alpha \tan\phi' f_s^{-1}\right)\right]$ de la solución de Jambu. 50
2.11. Esquema del ejercicio 2.6. 51
2.12. Perfil de la sección transversal del embalse, sitio de análisis. 55
2.13. Perfil de la sección transversal del talud, sitio de análisis. 56
2.14. Talud y círculo de falla a resolverse por el método de Bishop simplificado para el Problema 2.4. 57
2.15. Talud y círculo de falla a resolverse. 58
2.16. Talud y círculo de falla a resolverse por el método de las dovelas para el Problema 2.7. 59

2.17. Gráfica de la variación de f_s con k_h para el problema planteado en el Problema 2.10. 61

3.1. Ruptura plana por un plano de persistencia total de una andesita, vía estatal 6003 KM 38+790 de La Mansa a Amagá, Antioquia Colombia. 64
3.2. Construcción del contorno de existencia de una ruptura plana. 66
3.3. Los polos de las discontinuidades 1 y 2 caen en la zona; por tanto, se produce ruptura plana (Ejercicio 3.1). 67
3.4. Esquema de la delimitación de una banca vertical, análisis $\phi = 0$ sin fisura de tracción. 69
3.5. Esquema de la delimitación de una banca vertical, análisis $\phi = 0$ con fisura de tracción. 70
3.6. Esquema de la delimitación de un corte inclinado en un macizo rocoso con una familia de discontinuidades. 71
3.7. Variación del factor de cohesión para distintos valores del ángulo de buzamiento crítico. 73
3.8. Rupturas en cuña por planos de estratificación de areniscas. 77
3.9. Construcción del contorno de existencia de una ruptura de cuña. 78
3.10. Construcción para el análisis de ruptura por cuña para las condiciones del Ejercicio 3.5. 80
3.11. Evidencias de la presencia de rupturas por cuña, del Ejercicio 3.6. 80
3.12. Análisis cinemático para verificar las rupturas por cuña, del Ejercicio 3.6. . . 81
3.13. Fenómeno de volteo en macizos rocosos. 82
3.14. Construcción reducida del contorno de existencia de una ruptura por volteo de flexión. 83
3.15. Construcción del contorno de existencia de una ruptura con formación de rocas paralelepípedas. 84
3.16. Variables que intervienen en el análisis de estabilidad por volteo [1]. 85
3.17. Esquema del talud que se plantea en el ejercicio 3.7. 87
3.18. Carta de estabilidad del criterio de ruptura de Hoek-Brown para una inclinación de talud de $\beta = 75^\circ$. 89
3.19. Caída de rocas, vía férrea estatal de Cochabamba a Aiquile, Bolivia. 90
3.20. Simulación de la trayectoria de caída del perfil Sunnybrate (Canadá), [21]. Se usó en ese análisis un $C_{R,t} = 0.8$, $C_{R,n} = 0.70$, y $\mu_r = 0.52$. 102
3.21. Esquema de la tubería y el túnel (Problema 3.3). 106
3.22. Esquema de la ubicación de la tubería respecto los taludes (Problema 3.4). . 107
3.23. Esquema del corte de la vía (Problema 3.6). 108
3.24. Esquema de los posibles puntos de caída en un talud y cinemática de un bloque de roca (Problema 3.12). 110

4.1. Variables necesarias para definir una dovela y calcular su área. 114

4.2. Figura geométrica *bombardeada* por 1000 puntos aleatorios en un área de trabajo cuadrada de 1 m^2. 115
4.3. Función de distribución de probabilidades triangular simétrica en los límites $[0, 1]$. 118
4.4. Histograma resultado de la generación de 3 000 números aleatorios bajo una pdf triangular simétrica de límites $[0, 1]$. 119
4.5. Diferentes formas de funciones que se pueden obtener con tan solo modificar los parámetros p y q de forma de la función beta, para cualquiera de los valores a y b. 122
4.6. Mapas de la región Dark-3, E.E.U.U. (Basado y modificado de [32]). 127
4.7. Histogramas experimentales de c_r. 129
4.8. Histograma de los 3000 valores f_s modelados. 130
4.9. Funciones experimentales y teórico-paramétricas para f_s. 131

A.1. Variables para dibujar las trazas de los planos. 145
A.2. Variables para dibujar los polos de los planos. 146
A.3. Variable para dibujar el círculo de ϕ grados de radio concéntrico al círculo mayor. 148
A.4. Proyección estereográfica de polos de planos, de [77], Vol.2, páginas 195 a 196, generado con el código svgstereographicplot. 149

Índice de cuadros

1.1. Factores de seguridad recomendados para definir estabilidad en taludes[2] . . 3
1.2. Valores recomendados para m_i para ciertos grupos de roca [35]. 12
1.3. Valores recomendados para m_i para ciertos grupos de roca[35]. 13
1.4. Tabla rápida para la estimación del *Gsi*. 16
1.5. Herramienta para la estimación del *Gsi*. 17

2.1. Coordenadas de los contornos y líneas de cálculo. 51

3.1. Modos de ruptura en macizos rocosos con discontinuidades [72]. 63
3.2. Coeficiente de restitución de materiales rocosos [38]. 103

4.1. Distribuciones usadas en el área de planificación Dark 3. 127
4.2. Coordenadas de los puntos para analizar. 128
4.3. Resultados del análisis MC en el sitio Dark-3 con OpenLISA. 131

A.1. Medidas directas de r_p y δ_{dir}, sitios de falla 1 a 4 en el mismo orden. 151
A.2. Orientaciones de los planos, sitios de falla 1 a 4 en el mismo orden. 152

Capítulo 1
Generalidades en la estabilidad de taludes

Las superficies del terreno onduladas y muchas veces en pendientes abruptas que tienen ciertos paisajes son comunes en regiones de la faja andina, ésta última que está aún en un proceso de intenso tectonismo que hace que exista una alta intensidad y recurrencia de los procesos geológicos.

Sin embargo, por solo el hecho de estar localizados sobre la latitud del Ecuador hace a la región de los Andes septentrionales una región distinta a la de los Andes centrales y los Andes meridionales. Todas estas condiciones: tectonismo típico de los Andes septentrionales y localización en la latitud ecuatorial hacen que gran parte de Colombia y la parte occidental de Venezuela estén en un ambiente muy particular en la Tierra: *tectonismo y meteorización intensa*; únicamente repetido en Papua Nueva Guinea y algunos sitios de los países aledaños a éste, como Vietnam e Indonesia en el continente de Oceanía.

Por tales motivos, es imperante el estudio de la estabilidad de taludes a partir de la mecánica de suelos y rocas desde el punto de vista particular de la región; y poco a poco se tiene que ir desarrollando los conocimientos de estas disciplinas para estos materiales.

A medida que la población crece y la vida humana llega a ser más urbana, las terrazas y los corredores aluviales se han desarrollado como los primeros sitios para la construcción de edificios y otras obras de infraestructura como canales, y vías férreas y de automóviles. Sin embargo, el crecimiento se expandió desde estos corredores hacia las laderas, y es aquí donde la práctica de cortes (creación de nuevos taludes) es necesaria para seguir abasteciendo estos corredores.

El análisis de estabilidad de taludes es uno de los cálculos más fundamentales y el tema más popular dentro de la ingeniería geotécnica.

1.1. Factor de seguridad global

Por lo general, se tiende a asegurar la *calidad* o el buen comportamiento de un talud a partir del concepto de *factor de seguridad global* (f_s). Este valor se usa para examinar el estado de la estabilidad de los taludes.

El factor de seguridad global es un concepto que se origina del método de equilibrio límite en el análisis de estabilidad de taludes. Este factor es un índice que expresa la relación entre: la resistencia al corte media del material del macizo a lo largo de una potencial superficie de ruptura *v.s.* la resistencia de corte estrictamente necesaria para mantener el terreno en equilibrio.

Otra definición es aquella relación numérica entre la resistencia a corte disponible del material del macizo en la superficie de ruptura analizada y los esfuerzos de corte que generarán el movimiento de la masa. El concepto radica en tomar en cuenta:

- los esfuerzos que resisten y contrarrestan a los esfuerzos que causan el movimiento de la dovela σ_r (*i.e.* esfuerzos estabilizantes);
- los esfuerzos que causan el movimiento de la dovela σ_m (*i.e.* esfuerzos movilizantes o des–estabilizantes).

Para este análisis es aconsejable desarrollar las ecuaciones a nivel de esfuerzos. Todo esfuerzo se aplica a lo largo de la superficie inclinada de deslizamiento, por tanto en el análisis de cada dovela se tiene que proyectar toda fuerza normal o paralela a esa superficie y distribuirla en toda su longitud.

Sin embargo, el concepto de factor de seguridad global está ligado al concepto que se adopte de *ruptura* bajo el marco del método de equilibrio límite; y a las condiciones que generan dicha ruptura: como ser ruptura en condiciones estáticas o dinámicas, o ruptura en condiciones drenadas e indrenadas; por ejemplo.

Existe diferentes definiciones de ruptura de un talud dentro del marco del método de equilibrio límite. Por ejemplo, para el caso estático, la ruptura de un talud se da cuando:

- se crea una zona plástica a lo largo de una superficie en el macizo desde desde dos puntos extremos en el terreno (*e.g.* desde la pata hasta la corona del talud); y cuando
- existe un cambio en la velocidad de los desplazamientos de una masa potencial a romperse.

De similar modo, la ruptura de un talud en condiciones dinámicas (bajo el mismo marco del método de equilibrio límite) puede existir cuando:

- existe la creación de una zona plástica a lo largo de una superficie en el macizo desde dos puntos entremos en el terreno (como el caso estático);
- los desplazamientos permanentes de la masa potencial a romperse no se mantienen constantes; y cuando
- existe cambio en la velocidad en los desplazamientos permanentes de la masa potencial a romperse.

En el concepto dinámico, el desplazamiento permanente se refiere a aquellos generados después de un evento dinámico (*e.g.* un sismo):

En la práctica se sugiere los siguientes factores de seguridad para taludes y laderas en diseños geotécnicos, si se van a emplear métodos de equilibrio límite en dos dimensiones. Para el caso estático, los parámetros de resistencia tienen que ser los efectivos; y si se analiza a partir de parámetros indrenados, los factores de seguridad del Cuadro 1.1 tendrán que incrementarse en un 34 % [2].

Cuadro 1.1 Factores de seguridad recomendados para definir estabilidad en taludes[2]

	Condición	f_s	P_f
Caso estático	Durante la construcción	≥ 1.2	0
	Vida útil, caso estática	≥ 1.5	< 0.5
Caso dinámico	Durante la construcción, sismo de servicio	≥ 1.0	< 2
	Vida útil, sismo de diseño	> 1.0	< 5

El factor de seguridad puede variar a diferentes tiempos durante la construcción de terraplenes y a partir del corte de ladera o talud.

El factor de seguridad puede variar con el tiempo si alguna de las variables que lo determinan varía. Este caso es muy común cuando varía en especial la presión intersticial.

1.2. El rol de la fase líquida

La fase líquida del macizo (normalmente el agua) juega un papel importante en la pérdida de masa del material de superficie, sea por los procesos de erosión, sea por flujo y filtración del agua superficial, o por el flujo del agua subsuperficial. Debido a que el caudal de agua de superficie y los niveles del agua subterránea varían espacial y temporalmente, las predicciones del comportamiento del agua hacia el macizo suelen ser complicadas y con bastantes suposiciones simplificadoras.

La composición del agua de superficie puede afectar al desarrollo de la vegetación, y la composición del agua de subsuperficie puede corroer los materiales de las piezas estructurales de los sistemas de estabilización (*e.g.* tendones de anclaje, si no está bien protegidos).

Sin embargo, la mayor influencia que tiene el agua sobre el subsuelo está esencialmente en las propiedades resistentes del material. La presencia de la presión del agua disminuye la resistencia a corte en el suelo al disminuir el esfuerzo efectivo. El flujo de filtración en un talud puede accionar esfuerzos desestabilizadoras dependiendo de la dirección del gradiente de presiones del agua.

La influencia del agua a la resistencia del suelo saturado se explica a través del modelo de Terzaghi de la relación que existe entre la presión total σ y la presión efectiva σ' con la presión intersticial total u, dada por

$$\sigma = \sigma' + u. \tag{1.1}$$

El estado saturado drenado o indrenado son los dos estados del macizo que se abordaron en la mecánica de suelos clásica saturada. Estos estados son aceptables para un análisis en suelos transportados sedimentarios; sin embargo, se aleja de la realidad cuando se abordan los suelos residuales.

La Figura 1.1 muestra las condiciones del estado drenado y indrenado de un suelo transportado. Antes de que se aplique una variación de esfuerzos (incremento, en el caso de este ejemplo) el estado del macizo es drenado. Si se asume que la presión intersticial natural es constante en todo el tiempo, la situación es como se muestra en esa figura.

Cuando se aplica el incremento de esfuerzos, éste incremento es inmediatamente e inicialmente soportado por la presión intersticial; el incremento de la presión intersticial sería igual al incremento de esfuerzos. Luego, con el pasar el tiempo ese esfuerzo es delegado a ser soportado por las partículas. El cambio de la presión intersticial con el tiempo se llama *disipación de presiones intersticiales*, y llega un momento en que todo ese esfuerzo incrementado es soportado por las partículas, donde se dice que las presiones intersticiales se han estabilizado. Como se asumió que la presión intersticial natural es constante en todo el tiempo, en el estado disipado se llega a tener nuevamente el estado drenado; pero esta vez el esfuerzo efectivo es la suma del esfuerzo inicial más el incremento, y la presión intersticial es igual a la natural inicial.

Para el estado indrenado se tienen que hallar las presiones estáticas, y luego estimar cuál puede ser el valor de la presión intersticial excedente luego de aplicarse el incremento del esfuerzo. Otra forma de representar el estado de la presión intersticial en estado indrenado —*i.e.* la presión intersticial estática más la presión intersticial de agua excedente— es la de considerar la presión intersticial total equivalente a la estática, y obtener los parámetros resistentes del suelo por medio de ensayos indrenados, los que se denomina *ensayos rápidos*.

Para el estado drenado se debe hallar únicamente la presión estática, debido a que la presión intersticial excedente se la asume igual a cero. Estos parámetros son obtenidos por ensayos lentos.

1.3. El rol de la vegetación

Una de las ventajas de trabajar con materiales vivos es que ellos tienen la capacidad de crecer, adaptarse y repararse. Los árboles por ejemplo tienen la capacidad de incorporar y adoptar a objetos inanimados extraños en su propia estructura, a este propiedad se la

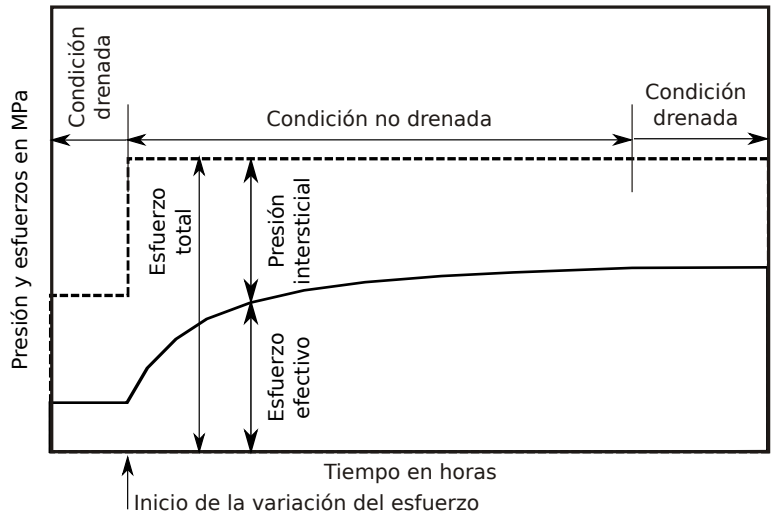


Figura 1.1 Influencia de la presión intersticial en los esfuerzos efectivos y totales en función del tiempo.

denomina *edaphoecotropism*. En las ciudades se ven bastantes ejemplos de esta propiedad de sobre vivencia del reino vegetal, en especial la recuperación que tienen los árboles a una herida en sus troncos.

La influencia que tiene la vegetación en el sistema puede clasificarse en las siguientes propiedades: refuerzo del suelo por raíces, disminución de la humedad del suelo, efecto de contrafuerte y arco, efectos de sobrecargas y efectos contra la erosión superficial y subsuperficial.

Las raíces refuerzan mecánicamente el suelo por transferencia de las tensiones de corte en el suelo a resistencias axiales en las raíces. La evaporación y la interceptación del follaje pueden limitar el nivel de presiones positivas de poros de agua. También se aumenta la estabilidad cuando las plantas modifican el régimen hidrológico en el suelo, por transpiración o por actuar como drenes. Sin embargo, la disminución de humedad puede acentuar la desecación y rotura en el suelo, que produciría una mayor capacidad de infiltración. Los tallos anclados pueden actuar como pilotes de contrafuerte y estribos de arco para sostener las fuerzas de corte.

El peso de la vegetación puede incrementar la estabilidad incrementando la tensión de confinamiento en la superficie o puede incrementar el momento resistente en el momento de evaluar las fuerzas motoras del sistema de deslizamiento. También existe el peligro de que el peso aumente los momentos motores del talud y la generación de *momentos flectores* locales por el vuelco del tronco a causa de la acción del viento sobre la copa.

El refuerzo que pueda brindar la raíz al suelo depende de las propiedades resistentes de la interfase friccionante, esto implica la resistencia a tracción y el diámetro de las raíces, la

especie del árbol y el tipo de suelo; y de la concentración y características de su ramificación, es decir de la distribución y orientación espacial de éstas en el suelo. Se ha alcanzado una tensión a tracción promedio de raíces con tronco de hasta 70 MPa, pero se ha visto que en forma general los valores están en el rango de 10 MPa a 40 MPa. Las resistencias a tracción de las raíces también varían según la estación climática del año, ya que durante las estaciones se modifica la relación *lignum v.s. cellulose* que producen las variaciones de las tensiones.

Las raíces refuerzan el suelo como lo refuerzan los sistemas de tierra armada, con la única diferencia de que éstos últimos son más resistentes. Calcular este refuerzo por medio de la idealización de fibras individuales es muy complicado y toma mucho tiempo, por las diferentes posiciones aleatorias que tiene las fibras de raíz sobre el suelo. Gray y Ohashi [27] y O´Loughlin y Ziemer [59] observaron que las fibras y raíces no afectan el ángulo de fricción interna de la arena, por lo tanto el refuerzo de las raíces es idealizado como una cohesión suplementaria que se le añade a la resistencia al corte del suelo. Es importante resaltar que la resistencia al corte y al arranque de la raíz está más afectada por el diámetro de la raíz que por la especie misma o por su distribución en el suelo. Las raíces de alta concentración o densidad con pequeños diámetros son más efectivas que pocas raíces y de gran diámetro, existe un descenso de la resistencia a la tensión con el incremento del diámetro [85]. El refuerzo de las raíces se incrementa con la densidad de raíces.

Se ha observado que, con la vegetación, existe un incremento de la capacidad de filtración del suelo con la vegetación, esto se debe a la presencia de las raíces, canales bajantes de raíces y debido al incremento de la rugosidad microscópica de la superficie. En el caso de hierbas y pastos, éstos actúan como una serie de drenes horizontales que interceptan el flujo de filtración y originan un flujo paralelo la superficie en el nivel medio de su raíz. El efecto de disminución de la humedad del suelo radica en la interceptación que genera la vegetación, especialmente la vegetación arbórea, a los eventos de las lluvias y la capacidad de transpiración de las plantas. La disminución de la humedad es mayor y permanente que a la eventual disminución de humedad presentado en flujos superficiales de agua de infiltración.

La influencia hidráulica de un árbol, que reduce significativamente la humedad causada por la evapotranspiración puede ser considerada igual a un radio de influencia en planta de por lo menos una vez la altura del árbol. Cuando la vegetación es retirada de repente se observa una elevación del nivel de agua. Por ejemplo, la capa freática se ha encontrado varios metros más arriba luego de que se ha limpiado de vegetación y árboles en una playa forestal en Dinamarca. También se ha observado que los niveles de agua freática alcanzarán los niveles iniciales, antes de haberse retirado la vegetación o deforestado, después de 15 años iniciado el proceso de regeneración [42] [8]. Asimismo, se calculó un incremento del 68 % en los niveles de agua máximos anuales, resultado del talado de árboles de tres años de edad [53]. La magnitud de la influencia de la vegetación en los niveles de agua es difícil de predecir por el lugar específico donde se pueda desarrollar el fenómeno, por el tipo de suelo, por la geología y la topografía, y porque los niveles de agua varían con la temporada climática y la evapotranspiración de la especie de vegetación existente.

Se presenta succión en el suelo por la presencia de plantas y árboles en la superficie.

Las raíces al penetrar el suelo y al ir creciendo van uniendo partículas de suelo y van creando compresiones entre sus fibras y que en forma conjunta forman una zona de compresión alrededor del eje del árbol. Si existen árboles no muy separados entre ellos se produce un efecto de arco en el suelo de eje a eje entre árboles. Un círculo vertical enraizado se desarrollará por raíces profundas, las cuales apuntalan el manto de suelo arriba del talud desde la ubicación de árbol. La vegetación superficial ayuda a anclar y acorazar las piedras al banco e incrementa la resistencia al arranque. Las raíces profundas de muchas especies de árboles se anclan en el suelo actuando como si fueran pilotes de estabilización. Las raíces laterales juegan un papel importante en mantener la continuidad lateral de la manta de suelo en un talud inclinado. Cortar dicha continuidad produce una ruptura peculiar, donde una manta de suelo forestal se desliza.

Los efectos de sobrecarga son sólo influyentes cuando existe o existirán plantas con tronco. El peso de los árboles depende de la especie y altura del árbol, del diámetro del tronco y del espaciamiento entre árboles, llamada también densidad de árboles. Si bien el peso del árbol actúa como carga puntual, puede ser considerada distribuída en lugares de forestación tupida y cuando el análisis se realiza a una profundidad de más de un metro [28] [85].

Cuando la profundidad estimada de ruptura plana y paralela a la superficie es mayor a 1.5 m puede obviarse el peso propio en los cálculos [32].

Para estimar la sobrecarga uniforme se debe recurrir a inventarios de especies de árboles, donde dan el valor de *volumen de madera en un acre* y el *peso unitario* de esa madera. Generalmente la unidad de volumen para fines de explotación de madera está en *board foot* (bf) y es inferior al volumen de todo el árbol, por lo tanto el valor estimado deberá ser aumentado en una cierta proporción.

1.4. Criterios de ruptura por el macizo

1.4.1. Criterio de ruptura de Mohr-Coulomb

En 1877 Coulomb propuso el criterio más simple pero más importante. Para el caso de esfuerzos totales es

$$\tau = \sigma_{\mathrm{n}} \tan\phi + c; \tag{1.2}$$

donde ϕ es el ángulo de fricción interna del material y puede adoptar las siguientes variaciones: ϕ_{d} para material seco y ϕ_{u} para saturado indrenado. Por lo normal ϕ_{u} se asume igual a cero. Asimismo, c es la cohesión y puede ser: c_{d} para el estado seco y c_{u} para el estado saturado indrenado.

El mismo criterio anterior pero para el caso de esfuerzos efectivos es

$$\tau = \sigma'_{\mathrm{n}} \tan\phi' + c'; \tag{1.3}$$

en este caso el esfuerzo efectivo depende mucho de la presión intersticial del medio poroso u,

$$\sigma'_{\mathrm{n}} = \sigma_{\mathrm{n}} - u. \tag{1.4}$$

En este caso ϕ' es el ángulo de fricción interna del material en estado saturado efectivo y drenado; el cual puede ser efectivo máximo ϕ'_{p} o efectivo residual ϕ_{r}, o puede ser efectivo crítico $\phi'_{\mathrm{cr}} \neq 0$. La cohesión c' para el estado efectivo y drenado también puede ser máximo c'_{p} o residual c_{r}.

En caso de que se desee usar el criterio de Mohr–Coulomb para el material rocoso a presiones totales, ésta es mejor expresarla en el espacio de los esfuerzos principales mayor y menor (*i.e.* σ_1 y σ_3) como sigue

$$\sigma_1 = m\sigma_3 + C_0; \tag{1.5}$$

donde resulta ser también una recta con pendiente m e intercepto en el eje de las ordenadas de C_0.

Puede ser necesario conocer los valores de m y C_0 en términos de los parámetros c' y ϕ' del modelo

$$m = \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}; \tag{1.6a}$$

$$C_0 = \frac{2c\cos\phi}{1-\sin\phi}. \tag{1.6b}$$

También es interesante conocer σ_{ci} y σ_{ti} en términos de c y ϕ, por lo tanto

$$\sigma_{\mathrm{ci}} = \frac{2c\cos\phi}{1-\sin\phi}; \tag{1.7a}$$

$$\sigma_{\mathrm{ti}} = \frac{2c\cos\phi}{b\,(1+\sin\phi)}; \tag{1.7b}$$

donde

$$b = \frac{\sigma_{\mathrm{ci}}}{m\sigma_{\mathrm{ti}}}, \text{ para } b \geq 1; \tag{1.8}$$

que es el factor que corrige el intercepto de la envolvente para $\sigma_1 = 0$ con la resistencia a tracción de la roca.

Finalmente, es también útil tener las expresiones de c y ϕ en términos de σ_{ci} y σ_{ti}

$$\sin\phi' = \frac{\sigma_{\mathrm{ci}} - \sigma_{\mathrm{ti}}}{\sigma_{\mathrm{ci}} + \sigma_{\mathrm{ti}}}; \tag{1.9a}$$

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{\mathrm{ci}}\sigma_{\mathrm{ti}}}. \tag{1.9b}$$

Para hallar c en función de σ_{ci} y σ_{ti} se parte de la identidad trigonométrica

$$\text{sen}^2\,\phi + \cos^2\phi = 1,$$

donde se despeja $\cos^2\phi$ y se desarrolla $1-\sin^2\phi$.

De este modo

$$\cos^2\phi = (1-\sin\phi)(1+\sin\phi). \tag{1.10}$$

Los términos de la derecha de la expresión se sustituyen por las expresiones en función c, σ_{ci} y $b\sigma_{ti}$ encontrados en los anteriores desarrollos.

Esto da por tanto

$$\begin{aligned}\cos^2\phi &= \frac{2c\cos\phi}{\sigma_{ci}}\frac{2c\cos\phi}{b\sigma_{ti}};\\ &= \frac{4c^2\cos^2\phi}{b\sigma_{ci}\sigma_{ti}}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Despejando c, se tiene la expresión buscada como se muestra

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{\frac{b\sigma_{ci}\sigma_{ti}}{4}};\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{b\sigma_{ci}\sigma_{ti}}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

1.4.2. Criterio de ruptura de Hoek-Brown

El criterio de Hoek-Brown es un modelo con una metodología disponible para hallar los parámetros de rotura para el macizo rocoso a partir de medias sobre él mismo [34]. Sin embargo, no debe perderse de vista que este modelo —tan bien difundido en la ingeniería práctica— tiene sus limitaciones y no es universal.

Uno de los autores del modelo, Brown [10] comentó que si bien sus investigaciones fueron útiles para el planteamiento del modelo, él no estuvo directamente involucrado con los cambios que se la han dado al modelo en los últimos diez años por el coautor Hoek y su grupo de investigación. Él afirma que está preocupado debido a que algunas de las innovaciones del modelo han pasado por alto los propósitos originales, las bases y la naturaleza empírica del criterio.

La expresión empírica del criterio de ruptura de Hoek-Brown para el material rocoso es

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \left(m_i\sigma_{ci}\sigma_3 + \sigma_{ci}^2\right)^{0.5}. \tag{1.13}$$

Si la Ecuación 1.13 se reagrupa como sigue, es posible obtener una ajuste lineal en el espacio $(\sigma_3, [\sigma_1 - \sigma_3]^2)$ para obtener los parámetros m_i y σ_{ci} a partir de ensayos de laboratorio de compresión uniaxial, compresión triaxial axisimétrico y tracción directa o indirecta:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = m_i \sigma_{ci} \sigma_3 + \sigma_{ci}^2. \tag{1.14}$$

Ejercicio 1.1. Para un material rocoso de un Neis cuarzo feldespático de los Andes Colombianos se hizo 35 ensayos de resistencia última (compresión uniaxial y compresión triaxial axisimétrica), tal como se muestra el siguiente cuadro. Obtenga los parámetros de resistencia del modelo de la envolvente Hoek-Brown y el coeficiente de correlación entre ellos. En adición, encuentre el valor de la resistencia a tracción uniaxial.

Ensayo	σ_1 en MPa	σ_2 en MPa	σ_3 en MPa	Ensayo	σ_1 en MPa	σ_2 en MPa	σ_3 en MPa
1	82.1	0.0	0.0	19	186.6	8.0	8.0
2	77.9	0.0	0.0	20	207.1	12.0	12.0
3	108.5	0.0	0.0	21	153.3	3.0	3.0
4	98.5	0.0	0.0	22	213.7	8.0	8.0
5	97.0	0.0	0.0	23	0.0	0.0	−13.0
6	299.7	3.0	3.0	24	0.0	0.0	−15.0
7	337.6	8.0	8.0	25	0.0	0.0	−12.8
8	296.2	12.0	12.0	26	0.0	0.0	−10.9
9	121.1	3.0	3.0	27	0.0	0.0	−16.3
10	152.0	8.0	8.0	28	0.0	0.0	−9.2
11	204.0	12.0	12.0	29	0.0	0.0	−16.5
12	133.2	3.0	3.0	30	0.0	0.0	−21.5
13	238.9	8.0	8.0	31	0.0	0.0	−14.0
14	310.9	12.0	12.0	32	0.0	0.0	−16.5
15	163.4	3.0	3.0	33	0.0	0.0	−18.1
16	193.9	8.0	8.0	34	0.0	0.0	−18.3
17	217.8	12.0	12.0	35	0.0	0.0	−15.9
18	110.9	3.0	3.0				

Solución 1.1. Los valores de m_i y σ_{ci} ajustados de los ensayos de laboratorio fueron 11.6 y 164 MPa respectivamente, y con un coeficiente R^2 igual a 0.509. Con la ecuación 1.19 se obtiene además que σ_{ti} es de -14 MPa. □

La pendiente de la línea recta de la Ecuación 1.14 en el espacio $(\sigma_3, [\sigma_1 - \sigma_3]^2)$ es $m_i \sigma_{ci}$ y la ordenada en el origen σ_{ci}^2.

Conocidos estos valores, σ_{ti} se calcula con

$$\sigma_{ti} = \frac{1}{2}\left(m_i - \sqrt{m_i^2 + 4}\right)\sigma_{ci}. \tag{1.19}$$

Ajuste de datos a una línea en el plano.-

Dado un conjunto de m medidas de pares ordenados

$$\{(p_{11},p_{21}),(p_{12},p_{22}),(p_{13},p_{23}),\ldots,(p_{1j},p_{2j}),\ldots(p_{1m},p_{2m})\}$$

que se correlacionan entre sí, expresadas en forma de una agrupación de m vectores $\boldsymbol{p}_j$ en una matriz $\boldsymbol{C}$ de 2 filas y m columnas

$$\boldsymbol{C} = \left(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3\ \cdots\ \boldsymbol{p}_j\ \cdots\ \boldsymbol{p}_m\right),$$

la línea que mejor se ajusta a estos puntos se calcula luego de minimizar la suma de los cuadrados de las distancias de esos puntos hacia la linea en cuestión (d_j), *i.e.*

$$s_{\min} = \underset{d\in\mathbb{R}}{\min} s(d),$$

para $s(d) = \sum_1^m d_j^2$.

La distancia de un punto $\boldsymbol{p}_j$ hacia la línea representada por un vector unitario $\boldsymbol{u}_1$ es

$$d_j = \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}\right); \tag{1.15}$$

donde $\boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}$ es el vector del promedio de los puntos $\boldsymbol{p}_j$ dado por

$$\boldsymbol{p}_o = \frac{1}{n}\begin{pmatrix}\sum_1^m p_{1j}\\ \sum_1^m p_{2j}\end{pmatrix} \tag{1.16}$$

La matriz de minimización $\boldsymbol{B}$ está dada por

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}; \tag{1.17}$$

donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} p_{11}-p_{\mathrm{o}1} & p_{21}-p_{\mathrm{o}2}\\ p_{12}-p_{\mathrm{o}1} & p_{22}-p_{\mathrm{o}2}\\ p_{13}-p_{\mathrm{o}1} & p_{23}-p_{\mathrm{o}2}\\ \vdots & \vdots\\ p_{1j}-p_{\mathrm{o}1} & p_{2j}-p_{\mathrm{o}2}\\ \vdots & \vdots\\ p_{1m}-p_{\mathrm{o}1} & p_{2m}-p_{\mathrm{o}2}\end{pmatrix},$$

equivalente a

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}\mathbf{1}\right)^{\mathrm{T}}; \tag{1.18}$$

y donde $\mathbf{1}$ es un vector de $(1\times m)$ con todos sus valores iguales a la unidad.

Ajuste de datos a una línea en el plano.- (Continuación)

Finalmente, el vector $\boldsymbol{u}_1$ que se busca es el vector propio que corresponde al mayor valor propio de la descomposición propia de $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{q}_{\max};$$

para $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}$, donde $\boldsymbol{q}_{\max} = \boldsymbol{q}_i$ para $\underset{\lambda\in\mathbb{R}}{\max}(\lambda_i)$, $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2]$, e $i = n$ siendo $n = 2$ la dimensión donde está planteado el problema.

Con base a esta expresión se publicó un número de valores interpolados y extrapolados de m_i. Los valores de m_i pueden variar de 7 a 25 [35] (Cuadro 1.2), pero el programa RockLab [64] sugiere el valor de máximo a 35 (Cuadro 1.3).

Cuadro 1.2 Valores recomendados para m_i para ciertos grupos de roca [35].

Tipo de roca	m_i
Rocas carbonatadas con muy buen desarrollo de clivaje de cristales: dolomita, caliza, mármol	7
Rocas arcillosas litificadas: lodosita, limonita, lutita, pizarra	10
Rocas arenosas con cristales fuertes y poco desarrollo de de clivaje de cristales: arenisca, cuarcita	15
Rocas ígneas cristalinas con poliminerales de grano fino: andesita, dolerita, diabasa, riolita	17
Rocas ígneas con poliminerales de grano grueso y rocas metamórficas: amfibolita, gabro, neiss, granito, dorita, cuarzodiorita	25

Una observación, los valores de m_i y σ_{ci} se calcula de una correlación, como se observó en el ajuste lineal, o en otras palabras m_i y σ_{ci} están en una relación directa; por tanto, los anteriores cuadros (Cuadro 1.2 y Cuadro 1.3) tendría que especificarse con un par de valores con σ_{ci} inclusive. Se recomienda que el ingeniero en ejercicio o el laboratorista coleccione pares de (m_i, σ_{ci}) con su respectivo coeficiente de correlación.

La envolvente de ruptura generalizada para el macizo rocoso tiene cuatro parámetros m_b, s, a, σ_{ci}, y la expresión es:

Cuadro 1.3 Valores recomendados para m_i para ciertos grupos de roca[35].

Tipo de roca	m_i	$\pm$
Rocas ígneas		
Aglomerado	19	3
Andesita	25	5
Basalto	25	5
Brecha	19	5
Dacita	25	3
Diabasa	15	5
Diorita	25	5
Dolerita	16	5
Gabro	27	3
Granito	32	3
Granodiorita	29	3
Norita	20	5
Obsidiana	19	3
Peridodita	25	5
Pórfido	20	5
Riolita	25	5
Tufa	13	5

Tipo de roca	m_i	$\pm$
Rocas sedimentarias		
Anhidrita	10	2
Brecha	20	2
Creta	7	2
Arcillolita	4	2
Conglomerado	21	3
Dolomita	9	3
Grauvaca	18	3
Yeso	10	2
Mármol	7	2
Arenisca	17	4
Lutita	6	2
Limolita	7	2
Caliza cristalina	12	3
Caliza sparitica	10	5
Caliza micrítica	8	3

Tipo de roca	m_i	$\pm$
Rocas metamórficas		
Anfibolita	26	6
Neiss	28	5
Hornfels	19	4
Mármol	9	3
Meta-Arenisca	19	3
Migmatita	29	3
Filita	7	3
Cuarcitas	20	3
Esquisto	10	3
Pizarra	7	4

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci}\left(m_b\frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s\right)^a, \tag{1.20a}$$

$$m_b = m_i \exp\left(\frac{Gsi - 100}{28 - 14D}\right), \tag{1.20b}$$

$$s = \exp\left(\frac{Gsi - 100}{9 - 3D}\right), \tag{1.20c}$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(e^{-\frac{Gsi}{15}} - e^{-\frac{20}{3}}\right); \tag{1.20d}$$

donde *Gsi* es el Índice de Geología Estructural (GSI: *Geological Structure Index*), D es el factor que dependen del grado de alteración al cual el macizo rocoso fue sometido por daño y relajación de esfuerzos, si $D = 0$ el macizo no ha sufrido ninguna alteración mientras que si $D = 1$ el macizo se altero de manera extrema; y puede variar de 0 para un macizo rocoso no alterado a 1 para un macizo rocoso muy alterado.

La expresión de la resistencia a compresión uniaxial del macizo rocoso σ_{cm} se obtiene de asignar el valor nulo a σ_3 en la Ecuación 1.20a y se simplifica a:

$$\sigma_{cm} = \sigma_{ci} s^a. \tag{1.21}$$

De forma similar, igualando $\sigma_3 = \sigma_t$ se obtiene la expresión de la resistencia a tracción uniaxial del macizo rocoso σ_{tm}; que es

$$\sigma_{tm} = -\frac{s\sigma_{ci}}{m_b}. \tag{1.22}$$

Si se desea obtener la resistencia normal σ_n y de corte τ en un determinado intervalo diferencial de ${}^{d\sigma_1}/_{d\sigma_3}$ las expresiones son las siguientes:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma_3}-1\right)\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma_3}+1\right)^{-1}, \tag{1.23a}$$

$$\tau = (\sigma_1-\sigma_3)\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma_3}\right)^{-0.5}\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma_3}+1\right)^{-1}; \tag{1.23b}$$

donde

$$\frac{d\sigma_1}{d\sigma_3} = 1 + a\,m_b\left(\frac{m_b\sigma_3}{\sigma_{ci}+s}\right)^{a-1}. \tag{1.24}$$

El módulo de deformación del macizo rocoso en giga pascales es

$$E_m = \begin{cases} \left(1-\frac{D}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_{ci}}{100}}\,10^{\frac{Gsi-10}{40}}, & \text{para } \sigma_{ci} \le 100 \text{ MPa.} \\ \left(1-\frac{D}{2}\right)10^{\frac{Gsi-10}{40}}, & \text{para } \sigma_{ci} > 100 \text{ MPa.} \end{cases} \tag{1.25}$$

En el caso que se quiera dar valores equivalentes del criterio de Mohr-Coulomb para el macizo rocoso con base al criterio de Hoek-Brown, se tiene unas expresiones válidas solo para un intervalo del esfuerzo principal menor $]\sigma_t;\sigma_{3max}[$:

$$\sin\phi = \frac{6a\,m_b\,(s+m_b\sigma_{3n})^{a-1}}{2\,(1+a)\,(2+a)+6a\,m_b\,(s+m_b\sigma_{3n})^{a-1}}, \tag{1.26a}$$

$$c = \frac{\sigma_{ci}\left[(1+2a)\,s+(1-a)\,m_b\sigma_{3n}\right](s+m_b\sigma_{3n})^{a-1}}{(1+a)\,(2+a)\sqrt{1+\frac{6a\,m_b(s+m_b\sigma_{3n})^{a-1}}{(1+a)(2+a)}}}. \tag{1.26b}$$

El esfuerzo σ_{3n} es igual a

$$\sigma_{3n} = \frac{\sigma_{3max}}{\sigma_{ci}}. \tag{1.27}$$

La resistencia a compresión uniaxial del macizo rocoso desarrollada en términos de a, s y m_m de la Ecuación 1.21 para un intervalo de $\sigma_3 =]\sigma_t; 0.25\sigma_{ci}[$ es

$$\sigma_{cm} = \sigma_{ci}\frac{\left[m_b+4s-a\,(m_b-8s)\right]\left[\frac{m_b}{4+s}\right]^{a-1}}{2\,(1+a)\,(2+a)} \tag{1.28}$$

La determinación de σ_{3max} para taludes se obtiene por las siguiente expresión

$$\frac{\sigma_{3\max}}{\sigma_{cm}} = 0.72\left(\frac{\sigma_{cm}}{\gamma H}\right)^{-0.91}. \tag{1.29}$$

Como se puede observar en las expresiones de arriba, todo el desarrollo se basa en tener un valor o intervalo de la variable *Gsi* para el macizo rocoso. El esquema original para la estimación del *Gsi* se muestra en el Cuadro 1.5. Para una estimación rápida se puede emplear el Cuadro 1.4.

Para estimar esta variable, es de igual importante —como el caso de los bimsoils y bimrocks que se verá más adelante— seleccionar la apropiada magnitud de escala para la descripción del macizo rocoso de acuerdo con el *volumen de perturbación* del proyecto; y esto resulta en que cada proyecto tienen una única escala en los seis gráficos de la tabla de los valores de *Gsi*.

Por ejemplo, la Figura 1.2 muestra la escala encontrada para la gráfica del *Gsi* después de hacer el análisis para una mina a cielo abierto con un altura total global del talud igual a 800 m, altura interrampa de 30 m y altura interbanco de 7 m. En este caso la dimensión característica de ingeniería se asumió para la altura interrampa de 30 m (*i.e.* para el diseño de los taludes entre rampas). De este modo, todas las facciones del macizo rocoso con una traza de discontinuidades promedio debajo de 2 m se considera parte de la matriz del macizo, y todas las facciones del mismo con traza de discontinuidades mayor a 20 m se considera parte de una unidad que se puede diferenciar en el macizo rocoso. Así por consiguiente, todas las trazas de discontinuidades comprendidas entre 2 m y 20 m son componentes del macizo rocoso en cuestión.

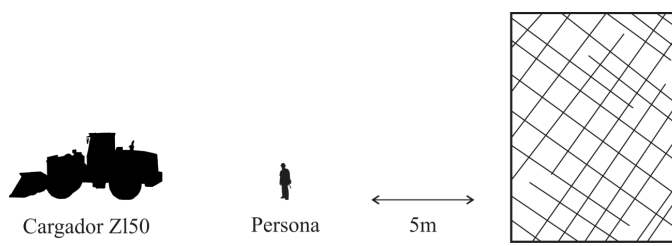


Figura 1.2 Relación de escala del segundo esquema estándar del *Gsi*.

Una vez obtenidos todos los parámetros del modelo de resistencia última de Hoek-Brown para el macizo rocoso con las ecuaciones arriba mostradas, se hace en el talud un análisis de estabilidad sea por el método de equilibrio límite o por el método esfuerzo–deformación; como se hizo con los materiales de suelo.

Cuadro 1.4 Tabla rápida para la estimación del *Gsi*.

Estructura del macizo \Cond. Discont.	MUY BUENA	BUENA	REGULAR	POBRE	MUY POBRE
INTACTA O MASIVA	78 a 100	65 a 90	55 a 80	no aplica	no aplica
CON BLOQUES	65 a 85	55 a 78	44 a 66	35 a 55	25 a 43
CON MUCHOS BLOQUES	55 a 75	45 a 65	37 a 55	28 a 44	18 a 35
CON BLOQUES ALTERADOS Y CON FOLIOS	45 a 63	38 a 55	28 a 45	20 a 36	12 a 27
DESINTEGRADA	38 a 54	31 a 46	23 a 38	14 a 29	7 a 20
LAMINADA Y CON FRACTURAS DE CORTE	no aplica	no aplica	18 a 30	9 a 23	2 a 15

1.5. Criterios de ruptura por la discontinuidad

1.5.1. Criterio de ruptura de Patton-Goldstein

El criterio de ruptura de Patton–Goldstein indica que un plano de discontinuidad sometido bajo un estado de esfuerzos normal σ_n y de corte τ —que se desliza en una dirección paralela a la dirección del esfuerzo de corte— ejerce una resistencia proporcional al esfuerzo normal y relativo a la fricción por la rugosidad y ondulación de la discontinuidad $\tan(\phi_b + i)$ hasta antes de un esfuerzo normal σ_a; y una resistencia proporcional a la fricción de la rugosidad únicamente a partir de ese mismo esfuerzo σ_a.

Por tanto, el esfuerzo de corte en la discontinuidad antes de que se rompan las ondulaciones está dado por

$$\tau = \sigma_n \tan(\phi_b + i), \text{ para } 0 \leq \sigma_n < \sigma_a. \tag{1.30}$$

El esfuerzo de corte en la discontinuidad después que se rompen las ondulaciones está dado por

$$\tau = \tau_o + \sigma_n \tan(\phi_r), \text{ para } \sigma_n \geq \sigma_a; \tag{1.31}$$

donde τ_o es el esfuerzo cortante en el eje de ordenadas para $\sigma_n = 0$; y que en muchos textos lo llamaron a este esfuerzo como una *cohesión* de la discontinuidad denotada como C_d.

Sin embargo, τ_o se puede colocar en función de las variables ϕ_b, ϕ_r, i y σ_a; que son independientes. Por tanto, aquella supuesta *cohesión* no es una variable independiente y no es conveniente asumirla como tal.

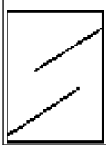
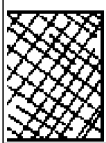
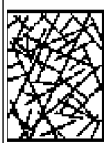
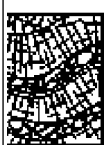
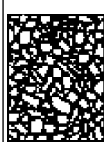
Para hallar τ_o en función de las variables independientes del modelo se observa el triángulo dado por el origen del los ejes coordenados O, el punto A y el punto que da σ_a (Figura 1.3), y se obtienen dos expresiones independientes:

$$\tan(\phi_b + i) = \frac{\tau_a}{\sigma_a} \tag{1.32}$$

$$\tau_a = \tau_o + \sigma_a \tan(\phi_r). \tag{1.33}$$

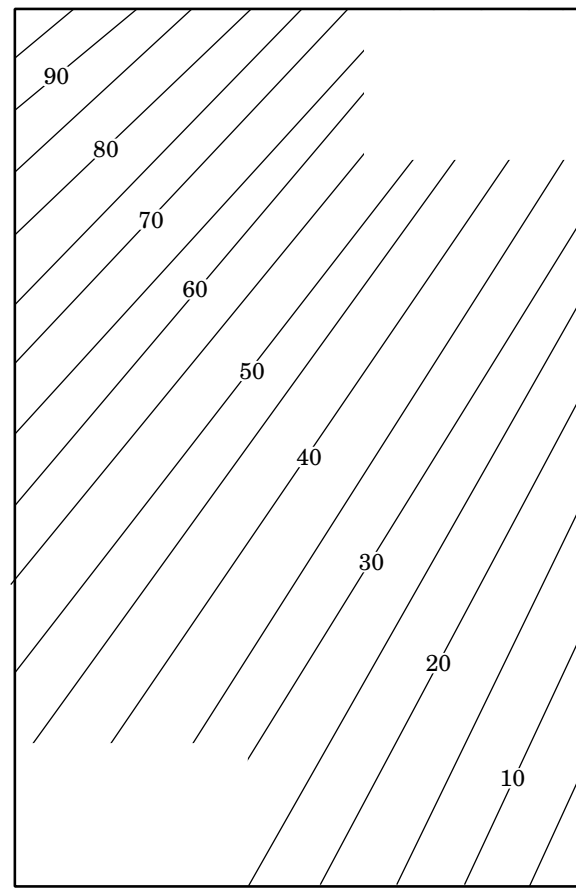
Cuadro 1.5 Herramienta para la estimación del *Gsi*.

GSI: Índice de Geología Estructural. Estime el valor promedio del *Gsi* de la litología, la estructura y las condiciones de las discontinuidades del macizo rocoso. No trate de ser muy preciso. Por ejemplo, dar un intervalo desde 33 a 37 es más realista que aseverar que *Gsi* = 35. Note que la tabla no aplica para fracturas controladas por estructuras. Cuando estén presentes planos estructurales planos y débiles en una orientación desfavorable con respecto a la cara de la excavación; son estos que dominarán el comportamiento del macizo rocoso†.	MUY BUENA, con superficies muy rugosas, frescas, sin meteorización	BUENA, superficies rugosas, meteorizadas y con óxidos de hierro	REGULAR, superficies suaves, moderadamente meteorizadas, y alteradas	POBRE, con superficies pulidas por corte (*slickensides*), altamente meteorizadas con capas o rellenos o con fragmentos angulares	MUY POBRE, con superficies pulidas por corte, altamente meteorizadas con capas o rellenos suaves

Esquema	Descripción estructura
	INTACTA O MASIVA, macizo rocoso intacto o masivo con discontinuidades bien espaciadas.
	CON BLOQUES, macizo rocoso inalterado y con buen interbloqueo de bloques cúbicos que se forman con tres familias de discontinuidades que se interceptan.
	CON MUCHOS BLOQUES, macizo rocoso parcialmente alterado pero interbloqueado con bloques angulares multifacéticos formados por cuatro o más familias de discontinuidades.
	CON BLOQUES ALTERADOS Y CON FOLIOS, macizo rocoso foliado con bloques angulares formados por muchas familias de discontinuidades. Los planos de bandeamiento o esquistocidad son persistentes.
	DESINTEGRADA, macizo rocoso pobremente interbloqueado, con rocas altamente quebrada con una mezcla de bloques angulares y redondeadas.
	LAMINADA Y CON FRACTURAS DE CORTE, macizo rocoso carente de algún interbloqueo debido al espaciamiento ceñido de los planos débiles de esquistocidad o de fracturas de corte.

La calidad de la superficie baja hacia la derecha→.

↓El interbloqueo de las partículas de roca bajan hacia abajo.



Escala:

Nota(s):

† La resistencia a corte de las superficies de las rocas (que son propensas a la deterioración como resultado del cambio del contenido de humedad) tiene que ser reducida si el agua está presente. Cuando se trabaja con rocas en las categorías *regular* y *muy pobre* se puede hacer un desplazamiento hacia la derecha para condiciones secas. La presión del agua se toma en cuenta bajo un análisis de esfuerzos efectivos.

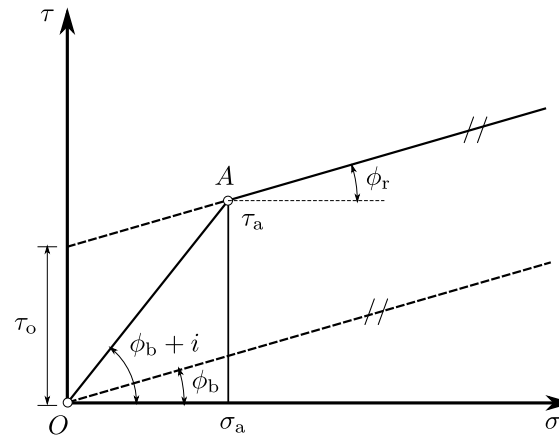


Figura 1.3 Esquema de la envolvente de Patton-Goldstein.

De la ecuación 1.33 se despeja τ_o y con τ_a de 1.33, ambos se reemplazan en 1.31 para obtener que

$$\tau = \sigma_a \left[\tan\left(\phi_b + i\right) - \tan\left(\phi_r\right)\right] + \sigma_n \tan\left(\phi_r\right), \tag{1.34}$$

lo cual se deduce que

$$\tau_o = C_d = \sigma_a \left[\tan\left(\phi_b + i\right) - \tan\left(\phi_r\right)\right]. \tag{1.35}$$

Finalmente, el modelo de ruptura última al corte de una discontinuidad bajo el criterio de Patton-Goldstein se resumiría así:

$$\tau\left(\sigma_n\right) = \begin{cases} \sigma_n \tan\left(\phi_b + i\right), & \text{para } 0 \leq \sigma_n < \sigma_a. \\ \sigma_a \left[\tan\left(\phi_b + i\right) - \tan\left(\phi_r\right)\right] + \sigma_n \tan\left(\phi_r\right), & \text{para } \sigma_n \geq \sigma_a. \end{cases} \tag{1.36}$$

1.5.2. Criterio de ruptura de Barton-Choubey

La expresión para el factor de seguridad de este caso de análisis con el criterio de Barton-Choubey (modelo BC) es similar al de la ecuación 3.7, donde se reemplaza para ϕ la expresión del ángulo de fricción empírica propuesta por los autores

$$\phi = \phi_b + Jrc \lg\left(\frac{Jcs}{\sigma_n}\right), \tag{1.37}$$

que depende del coeficiente de rugosidad de la discontinuidad Jrc, la resistencia a corte de la discontinuidad Jcs y el ángulo de fricción básica ϕ_b. Hay que tomar en cuenta que el segundo sumando de la Ecuación 1.37, *i.e.* $Jrc \lg(Jcs/\sigma_n)$, representa a un valor en ángulos

sexagesimales y no radianes. De este modo, también el primer sumando (ϕ_b) tiene que estar en el mismo tipo de valores angulares.

Regresando a la primera inquietud; entonces, la expresión del factor de seguridad para el caso de una ruptura plana según el criterio BC resultaría siendo

$$f_s = \cot\alpha \tan\left[\phi_b + Jrc \lg\left(\frac{Jcs}{\sigma_n}\right)\right]; \tag{1.38}$$

donde σ_n está dada por la Ec. 3.3.

La solución para hallar α_{cr} se hace de forma iterativa.

El valor de Jcs y Jrc son dependientes de la escala de análisis. El valor de Jrc presentado en la gráfica de comparación de perfiles de la superficie de roca es para longitudes de no más de 0.1 m (*i.e.* Jrc_{10} para L_{10}), por tanto es necesario transformar este valor a aquel que representa toda la superficie de desplazamiento de la roca sobre la superficie (longitud de L_r). Similar situación ocurre con el valor de Jcs, este se transforma de Jcs_{10} a Jcs.

Para dar continuidad a las expresión empírica inicial (Eq. 1.37), Bandis y coinvestigadores [3] establecen las siguientes ecuaciones empíricas de corrección por escala para Jcs y Jrc

$$Jrc = Jrc_{10}\left(\frac{L_r}{L_{10}}\right)^{-0.02\,Jrc_{10}}, \tag{1.39a}$$

$$Jcs = Jcs_{10}\left(\frac{L_r}{L_{10}}\right)^{-0.03\,Jrc_{10}}. \tag{1.39b}$$

Tenga el cuidado al usar estas ecuaciones empíricas, que el exponente de la ecuación de corrección por escala del Jcs (Ec. 1.39b) es la variable Jrc_{10}.

Algunos autores [43] recomiendan que las relaciones de las ecuaciones 1.39 se tiene que usar con cautela para grandes longitudes de discontinuidades (*e.g.* $L_r \geq 5\,\text{m}$) porque dan valores de Jrc y Jcs muy bajos. Ellos afirman que si ${}^{Jcs}/_{Jcs_{10}} < 0.3$ o ${}^{Jrc}/_{Jrc_{10}} < 0.5$ entonces los valores son sospechosos de ser poco reales, a no ser que existan muy buenas razones —como ensayos de campo— para aceptarlos.

El proceso de estimación de Jrc_{10} por comparación directa de los *perfiles típicos* propuestos por los autores [5] es subjetivo y sujeto a errores [87].

Por tal razón, se tienen que usar con preferencia métodos de medidas directas sobre las discontinuidades con el fin de obtener valores cuantitativos de la ondulación de una discontinuidad. Los investigadores [82] plantean usar para la estimación de Jrc_{10} una ecuación empírica que está en función a un coeficiente fractal de la ondulación (Z_2) que se denomina coeficiente de Myers, que es

$$Jrc_{10} = 32.2 + 32.47 \lg Z_2. \tag{1.40}$$

El valor del coeficiente fractal Z_2 se obtiene luego de medir las ondulaciones con base a medidas de la distancia perpendicular (y_i) a un eje lineal longitudinal (x_i) —de preferencia con longitud (l) igual a 0.1 m— que pertenece al plano de la discontinuidad, en n intervalos igualmente distanciados en Δx

$$\begin{aligned} Z_2^2 &= \frac{1}{l}\int_{x=0}^{x=l}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x; \\ &= \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{x_{i+1}-x_i}; \\ &= \frac{1}{n\,\Delta x^2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1}-y_i)^2. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Sin embargo, el valor de Z_2 varía de acuerdo al valor de Δx. Para las medidas de la ondulación de las discontinuidades de roca, se aconseja que el intervalo no sea mayor a 1 mm y de preferencia alrededor de 0.25 mm [87]. La resolución del valor y tiene que ser menor a 0.1 mm.

Lista de ejercicios

1.1. Defina talud y ladera.

1.2. ¿Cuál es el objeto y el objetivo de estudio de este texto?

1.3. ¿Qué valores tienen que tener los parámetros del modelo Hoek-Brown del macizo rocoso (*i.e.* parámetros a, s, m_b, Gsi y D) para que se convierta en un modelo también de tipo Hoek-Brown, pero del material rocoso?

Capítulo 2
Análisis de estabilidad en suelos

Los criterios descriptivos sobre la estabilidad de taludes son de al menos desde la mitad del siglo XIX. Una obra que se destaca para esa época es la del ingeniero francés Alexander Collin de 1846[14] titulada *Investigación experimental de deslizamientos espontáneos en suelos arcillosos, tomando en cuenta algunos principios de mecánica terrestre* (*Experimental research on spontaneous landslides in clay soils, together with considerations on some principles of terrestrial mechanics*).

Sin embargo, son alrededor de los 100 años que pasaron desde los primeros intentos en 1916[1] para determinar la estabilidad de estos cortes (taludes) a través de un proceso de *matematización*[2]. En ese entonces, esta solución cuantitativa se lograba por métodos de cálculo *a mano*.

De este proceso, finalmente se dio lugar al método de equilibrio límite conocido como el *método sueco*, también llamado *método ordinario* o método de Fellenius; publicado primero en idioma sueco en 1918 [22], luego en idioma alemán en 1927 [23] y finalmente en idioma inglés en 1936 [24].

Fue a partir del método de Fellenius que se empezó a desarrollar la técnica en los países de habla inglesa. En 1937 Taylor [79] propone ábacos de estabilidad. A mediados del siglo XX Bishop y/o Janbu proponen el método simplificado de dovelas [6, 40] desde un punto de vista posible para la automatización y la generalización en máquinas computacionales que estaban emergiendo para esa misma época. En este aspecto, existe grandes discrepancias en determinar quién de los dos autores (Bishop o Janbu) fue el primero en proponer el método de las dovelas.

Con el inicio de la era de las computadoras en los años 50 del siglo XX (*e.g.* [49]), pero extensivo a finales de la década de los 60 y todos los 70, la tarea de cálculo *a mano* fue

[1] En 1916 se cree que se logró el primer análisis de estabilidad de taludes con el uso de las matemáticas [12]

[2] La matematización es un proceso que diseña y desarrolla modelos conceptuales basados en leyes de la naturaleza en notación matemática. Es decir, un proceso por el cual el científico transforma lo observado de la naturaleza en un modelo matemático.

acelerada con la publicación de tablas y ábacos de diseño a través de la variable llamada *coeficiente de estabilidad* (*e.g.* ábacos de Bishop y Morgenstern [7], o de Hoek & Bray [33]). Asimismo, la investigación en este campo fue direccionada a la creación de algoritmos más eficientes y más generales. En aquellos tiempos, los algoritmos de análisis de estabilidad de taludes fueron considerados programas altamente complicados, e inclusive se consideró el más complicado que se haya escrito para un computador de origen británico [9].

Es a finales de la década de los 60 que se publica el método de Morgenstern & Price [56, 57], donde unifica el equilibrio de fuerzas y el de momentos en un único método; y el método de Spencer [74], que resuelve el problema de las fuerzas internas haciendo éstas de dirección paralela.

Para los años 70 se publica el método de Sarma [67] que toma en cuenta una carga sísmica horizontal pseudo-estática; pero lo más relevante es que se entra en un proceso de automatización y mejora de los métodos iniciales; situación que dura hasta los años 80.

En los años 80 se concentra la atención en métodos de búsqueda automatizados de la *superficie de ruptura* más crítica; y para principios de los años 90 se tiene estructurado el *método generalizado de dovelas* (*Generalized Limit Equilibrium Method* con la siglas GLE; o *Generalized Method of Slices* con las siglas GMS).

En los años 90 se concentra la atención en el uso de variables estocásticas y análisis probabilista, además de la aplicación de los métodos de esfuerzo y deformación en el análisis de estabilidad de taludes (estos resueltos sea por el método de diferencias finitas o el método de elementos finitos [30]). También se concentra la atención en los métodos de análisis de estabilidad de taludes de equilibrio límite pero para tres dimensiones.

Para finales del siglo pasado y la primera década del siglo XXI se aplica varios modelos discretos en la estabilidad de taludes, y se impulsa la investigación para lograr métodos numéricos y físicos combinados.

Los programas de computación automatizaron los métodos de Bishop y Janbu, y los otros métodos que surgieron posterior a ellos (que se nombraron arriba); sin embargo, los métodos siguen en su versión inicial ¡no los han reemplazado!. Estos *métodos clásicos* siguen vigentes, excepto que ahora ellos están presentados de tal forma que se puede analizar varios casos, varios procesos de ruptura y para distintas geometrías de taludes. Hoy en día, los programas de computación para estabilidad de taludes están disponibles a precios aún no accesibles para los usuarios de ciertos países como los de América Latina. Se cree que para los siguientes años se desarrolle programas en código abierto.

Asimismo, la incorporación de los modelos físicos a escala con la instrumentación a tiempo real de taludes reales serán los nuevos retos de la geotecnia mundial en este campo.

2.1. Método de equilibrio límite para rupturas planas

Cuando se presenta un suelo permeable por encima de uno impermeable (fuertemente contrastantes entre sí y ambos con planos de estratificación cercanamente paralelos a la superficie del terreno) es posible manifestar la posibilidad de una ruptura de tipo plana entre este contacto.

Se asume que la superficie de ruptura potencial es paralela a la superficie del terreno del talud y que esta está a una profundidad que es muy menor a su longitud (una longitud al menos 10 veces la profundidad de la superficie de ruptura desde la superficie del terreno). El talud se puede considerar inclusive que tiene una *longitud infinita* que posibilita ignorar de este modo los efectos terminales; suposición que va en favor de la seguridad.

2.1.1. Talud seco en material incohesivo

La estabilidad de un material incohesivo (*i.e.* netamente friccionante) y además seco — que conforma un talud donde la superficie potencial de deslizamiento es plana y paralela a la superficie del terreno— depende únicamente de su propio ángulo de fricción interna seco ϕ_{d}.

Observe la Figura 2.1 y asuma que las fuerzas verticales y horizontales que actúan en las paredes verticales del contorno de la dovela son iguales y opuestas. Luego resuelva el equilibrio de fuerzas paralelas a la inclinación de la superficie de ruptura, donde se tome en cuenta la fuerza movilizante $W\sin\beta$; y finalmente el equilibrio de fuerzas normales para el peso proyectado hacia la normal de la superficie de ruptura de la dovela, *i.e.* $W\cos\beta$.

El concepto de *factor de seguridad* contra el deslizamiento puede expresarse como la razón de las fuerzas resistentes (*i.e.* estabilizantes) F_{r} respecto las fuerzas movilizantes (*i.e.* des-estabilizantes) F_{m}, esto es

$$f_{\mathrm{s}} = \frac{F_{\mathrm{r}}}{F_{\mathrm{m}}}. \tag{2.1}$$

Por tanto, remplazando en la anterior ecuación (Eq. 2.1) las expresiones de las proyecciones del peso de la dovela, se tiene

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{s}} &= \frac{W\cos\beta\tan\phi_{\mathrm{d}}}{W\sin\beta} \\ &= \frac{\tan\phi_{\mathrm{d}}}{\tan\beta}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

En el estado de equilibrio límite $f_{\mathrm{s}} = 1$, por tanto

$$\beta_{\max} = \phi_{\mathrm{d}}. \tag{2.3}$$

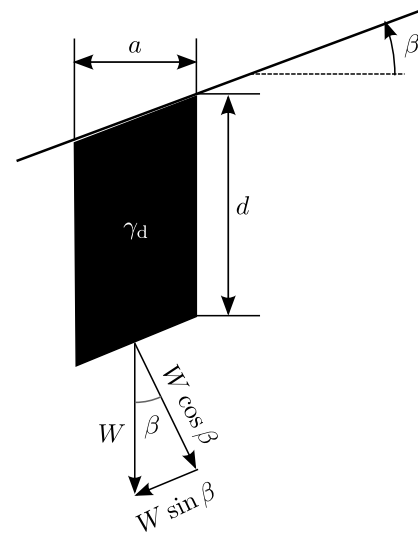


Figura 2.1 Esquema de la delimitación de un talud seco en arena.

2.1.2. Talud saturado en material incohesivo

Para el caso de un talud infinito —en un suelo drenante incohesivo (*i.e.* $c' = 0$) y saturado sin flujo— se tiene la siguiente expresión en términos del peso unitario sumergido ($\gamma' = \gamma_{\text{sat}} - \gamma_{\text{w}}$):

$$f_{\text{s}} = \frac{\gamma'}{\gamma_{\text{sat}}} \frac{\tan\phi'}{\tan\beta}. \tag{2.4}$$

2.1.3. Talud saturado indrenado

Ahora con la misma dovela y material saturado drenado sin flujo, se analiza el caso donde el talud infinito está compuesto esta vez por un material donde su resistencia mecánica está en un estado indrenado; es decir, se analiza en el momento donde el material aún no ha disipado sus presiones intersticiales.

La fuerza mobilizante es por tanto

$$F_{\text{m}} = \gamma_{\text{sat}}\, da \sin\beta,$$

y la fuerza resistente es:

$$F_{\mathrm{r}} = c_{\mathrm{u}} \frac{a}{\cos\beta}.$$

El factor de seguridad contra el deslizamiento es por tanto:

$$f_{\mathrm{s}} = \frac{c_{\mathrm{u}}}{\gamma_{\mathrm{sat}}\, d \cos\beta \sin\beta}.$$

2.1.4. *Talud con nivel freático debajo de la superficie del terreno*

En este caso se analiza aquellos taludes que tienen una inclinación con la horizontal de β, una profundidad del plano de ruptura de d, además con una superficie del nivel freático paralela a la superficie del terreno y ubicada por encima de la superficie de ruptura en un valor de m veces d [donde $0 \leq m \leq 1$]

$$m = \frac{d_{\mathrm{w}}}{d}; \tag{2.5}$$

(donde la profundidad desde la superficie del terreno hacia el nivel freático (z_{w}) es

$$z_{\mathrm{w}} = d - d_{\mathrm{w}}); \tag{2.6}$$

entonces, asumiendo un criterio de ruptura de Mohr–Coulomb sobre ese plano, se tiene que

$$\sigma_{\mathrm{r}} = (\sigma_{\perp} - u)\tan\phi' + c'. \tag{2.7}$$

Y si se le da el nombre de γ^* al peso unitario por encima del nivel freático, sabiendo que los esfuerzos desarrollados perpendicular a la superficie de ruptura ($\sigma_{\perp}$), paralelo a la superficie de ruptura ($\sigma_{\parallel}$) y la presión intersticial en ese plano (u) son de forma respectiva:

$$\sigma_{\perp} = [(1-m)\,\gamma^* + m\gamma_{\mathrm{sat}}]\, d\cos^2\beta, \tag{2.8a}$$

$$\sigma_{\parallel} = [(1-m)\,\gamma^* + m\gamma_{\mathrm{sat}}]\, d\sin\beta\cos\beta, \tag{2.8b}$$

$$u = md\gamma_{\mathrm{w}}\cos^2\beta; \tag{2.8c}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{s}} &= \frac{\sigma_{\mathrm{r}}}{\sigma_{\mathrm{m}}} \\
&= \frac{(\sigma_{\perp} - u)\tan\phi + c}{\sigma_{\mathrm{m}}} \\
&= \frac{[m\gamma_{\mathrm{sat}} + (1-m)\,\gamma^{*} - m\gamma_{\mathrm{w}}]\,d\cos^2\beta\tan\phi' + c'}{[m\gamma_{\mathrm{sat}} + (1-m)\,\gamma^{*}]\,d\sin\beta\cos\beta}.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

En esta ecuación, γ^{*} es el peso unitario por encima de la superficie de presiones hidráulicas iguales a la presión atmosférica (*i.e.* nivel freático).

Muchos calculistas difieren en el criterio de escogencia del valor de γ^{*}. Algunos poco conservadores, pueden igualar este valor al peso unitario seco (γ_{d}); es decir, $\gamma^{*} \to \gamma_{\mathrm{d}}$. Otros prefieren un valor intermedio del peso unitario húmedo (γ); es decir, $\gamma^{*} \to \gamma$. Sin embargo, aquí uno podría preguntarse "¿A qué grado de saturación se considerará ese peso unitario húmedo? —Cualquier suposición es arbitraria, pero en caso de usar una de ellas distinta de la seca o saturada se tiene que especificar el grado de saturación con la cual se calculó el peso unitario. Ahora bien, tal complicación no tiene sentido hacerla si no se llevará a cabo un análisis exhaustivo de análisis de estabilidad de taludes bajo la *teoría de los suelos insaturados*. La última posibilidad es hacer $\gamma^{*} \to \gamma_{\mathrm{sat}}$, esta resulta en una suposición extrema, que es en favor de la seguridad.

Aquí se recomienda asumir que el suelo por encima del nivel freático está muy húmedo al punto en el cual el peso unitario húmedo del suelo (γ^{*}) se aproxima al peso unitario saturado (γ_{sat}). Esta suposición posibilita obtener valores conservadores bajo un modelo simple.

De ser así la Ec. 2.10 se reduce a

$$
f_{\mathrm{s}} = \frac{(\gamma_{\mathrm{sat}} - m\gamma_{\mathrm{w}})\,d\cos^2\beta\tan\phi' + c'}{\gamma_{\mathrm{sat}} d\sin\beta\cos\beta}.
\tag{2.10}
$$

Ejercicio 2.1. Un talud natural largo en una arcilla fisurada y sobreconsolidada tiene una inclinación de 12° con la horizontal. La superficie de agua está en la superficie del terreno y no existe flujo. Un deslizamiento se desarrolla en un plano paralelo a la superficie a una profundidad de 5 m. El peso unitario saturado de la arcilla es de 20 kN m^{-3}. La resistencia crítica efectiva tiene parámetros de c'_{cr} de 10 kN m^{-2} y ϕ'_{cr} de 26 °; mientras que los parámetros residuales son c_{r} de 0 kN m^{-2} y ϕ'_{r} de 18 °. Determine el factor de seguridad a lo largo de la superficie de ruptura:

- en términos de los parámetros de resistencia crítica;
- en términos de los parámetros de resistencia residual.

Solución 2.1. Para obtener la solución se parte que

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\perp} &= \gamma_{\mathrm{sat}} d\cos^2\beta \\
&= 20 \times 5 \times \cos^2 12^{\circ} = 95.5 \text{ kN m}^{-2},
\end{aligned}
$$

$$\sigma_{\parallel} = \gamma_{\text{sat}} d \sin\beta \cos\beta$$

$$= 20 \times 5 \times \sin 12^\circ \times \cos 12^\circ = 20.3 \text{ kN m}^{-2},$$

$$u = \gamma_{\text{w}} d \cos^2\beta$$

$$= 9.8 \times 5 \times \cos^2 12^\circ = 46.8 \text{ kN m}^{-2}.$$

Para el caso de los parámetros críticos,

$$\tau_{\text{f}} = c'_{\text{cr}} + (\sigma_{\perp} - u)\tan\phi_{\text{cr}}$$

$$= 10 + (48.7 \times \tan 26^\circ) = 33.8 \text{ kN m}^{-2}.$$

Por tanto el factor de seguridad es

$$f_{\text{s}} = \frac{\tau_{\text{f}}}{\sigma_{\parallel}} = \frac{33.8}{20.3} = 1.66.$$

Para el caso de los parámetros residuales,

$$f_{\text{s}} = \frac{\gamma'}{\gamma_{\text{sat}}} \frac{\tan\phi'_{\text{r}}}{\tan\beta}$$

$$= \frac{10.2}{20} \times \frac{\tan 18^\circ}{\tan 12^\circ} = 0.78.$$

□

2.1.5. *Relación presión intersticial v.s. esfuerzo total vertical*

Se desea obtener la relación de la presión intersticial (u) respecto al esfuerzo total vertical (σ_{v}) —definida como el factor r_{u}— en un punto dado en la base de la dovela de altura d; todo esto para el caso del modelo de talud infinito bajo una condición de flujo hidráulico estacionario, con superficie de ruptura paralela a la superficie de terreno.

Sea la posición del nivel freático ubicada a una profundidad por debajo de la superficie del terreno igual a $(1-m)$, donde m es un factor de proporción que multiplica a d que indica la altura relativa de columna de agua en la base de la dovela (d_{w}) con d; entonces

$$d_{\text{w}} = md. \tag{2.11}$$

La presión intersticial se calcula a partir del peso del agua en la dovela (W_w) distribuida en una superficie inclinada (s) que es paralela a la superficie de terreno, y que se proyecta perpendicular a ésta; por tanto, el peso en términos de la geometría de la dovela es

$$W_w = a d_w \gamma_w \cos\beta. \tag{2.12}$$

El esfuerzo que actúa es el peso W_w distribuido en $s = a\sec\beta$; es decir

$$\begin{aligned}\sigma_w &= \frac{W_w}{s} \\ &= \frac{a d_w \gamma_w}{a}\cos^2\beta \\ &= d_w \gamma_w \cos^2\beta \\ &= m d \gamma_w \cos^2\beta.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Este esfuerzo es el esfuerzo intersticial, *i.e.* $u = \sigma_w$.

El peso total de la dovela es el peso saturado por encima del nivel freático más la suma del peso sumergido con el peso del agua por debajo del nivel freático, pero esto resulta ser simplemente el peso saturado de toda la dovela:

$$\begin{aligned}W_s &= a[(1-m)d\gamma_{sat} + md\gamma' + md\gamma_w] \\ &= a[(1-m)d\gamma_{sat} + md(\gamma' + \gamma_w)] \\ &= a[(1-m)d\gamma_{sat} + md\gamma_{sat}] \\ &= ad\gamma_{sat}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Este peso se distribuye sobre solo el ancho de la dovela, porque se desea encontrar aquel esfuerzo vertical

$$\begin{aligned}\sigma_v &= \frac{W_s}{a} \\ &= \frac{ad\gamma_{sat}}{a} \\ &= d\gamma_{sat}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}r_u &= \frac{u}{\sigma_v} \\ &= \frac{md\gamma_w\cos^2\beta}{d\gamma_{sat}} \\ &= \frac{\gamma_w}{\gamma_{sat}} m\cos^2\beta.\end{aligned} \tag{2.16}$$

2.1.6. Ábacos del cálculo

Si bien la solución simple del caso anterior (Ec. 2.10) es de fácil solución numérica porque no necesita de iteraciones, no estuvo de más que algunos investigadores propongan los ábacos para el cálculo del factor de seguridad.

En este caso, los ábacos están en función de la relación de la presión intersticial y el esfuerzo total vertical $r_u = {}^{u}/_{\sigma_v}$ en el punto de análisis (*i.e.* en el centro de la base de la dovela). Además, para ser conservadores se hizo que $\gamma^* \to \gamma_{sat}$.

Al colocar r_u en términos de la geometría del talud y las condiciones hidráulicas se tiene

$$r_u = \frac{\gamma_w}{\gamma_{sat}} m \cos^2\beta. \tag{2.17}$$

De este modo, la expresión de la Ec. 2.10 se transforma a la siguiente

$$f_s = \frac{c'}{\gamma_{sat} d \cos\beta \sin\beta} + \left(1 - \frac{r_u}{\cos^2\beta}\right) \frac{\tan\phi'}{\tan\beta}. \tag{2.18}$$

Si se reagrupa la anterior expresión del siguiente modo

$$\frac{f_s}{\tan\phi'} = \left(\frac{c'}{\gamma_{sat} d \tan\phi'}\right) \sec\beta \operatorname{cosec}\beta + \cot\beta - r_u \cot\beta \sec^2\beta, \tag{2.19}$$

entonces podremos declarar los primeros términos de la parte izquierda y de la derecha como variables independientes de la inclinación del talud y dependientes de las propiedades del suelo; y útiles para el ábaco. Y luego, las variables β y r_u como aquellas variables que modifican las condiciones de estabilidad del talud, *i.e.* la geometría y el agua.

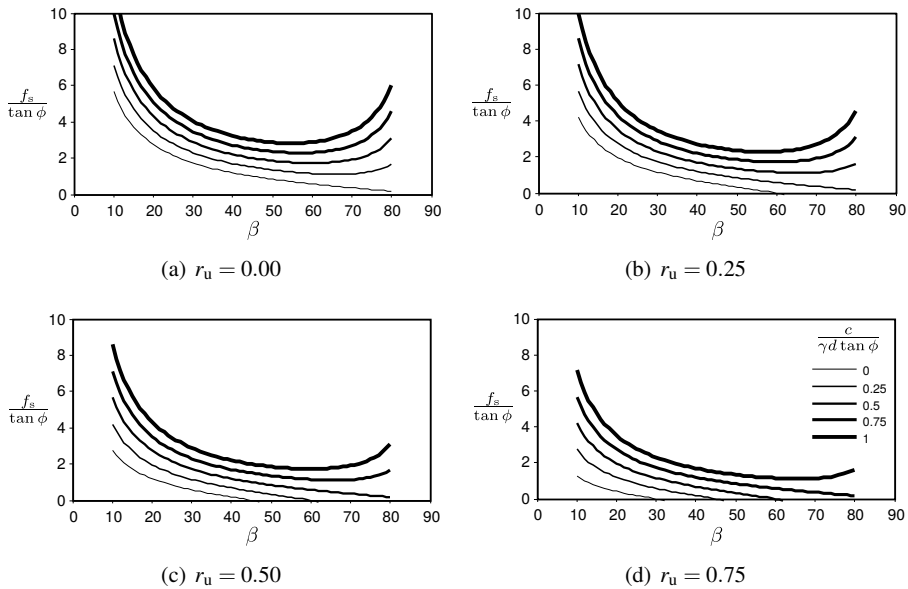
La Figura 2.2 fue creada con la secuencia de funciones que se muestra en el Listado de Código 2.1, y se puede hacer correr desde el archivo de lotes `plotRuAbaciSCR`.

La implementación en MATLAB® de la Eq. 2.19 está en la función `fsplanesloperuvalue` .

Listado 2.1. Dibujo de ábacos para el cálculo de f_s con la variable r_u.

```
% plotRuAbaciSCR.m
ruArray =0:0.25:0.75;
numVals =length(ruArray);

figure( 'Color',ones(1,3) );
for i=1 :numVals
    subplot( numVals,1,i );
    genfsruplaneslopeabacus( ruArray(i) );
    titleString =sprintf( 'r_u =%3.2f', ruArray(i) );
    title( titleString );
    xlim( [0 90] ); ylim( [0, 10] );
end
```

Como se puede observar, este lista llama a la función `genfsruplaneslopeabacus` que también fue creada en este proyecto. □



(a) $r_u = 0.00$ (b) $r_u = 0.25$

(c) $r_u = 0.50$ (d) $r_u = 0.75$

Figura 2.2 Ábacos para el cálculo de f_s a cuatro diferentes valores de r_u [29].

Ejercicio 2.2. En un proyecto se desea colocar material de desecho encima de un talud de roca con inclinación 60 ° con el fin de no modificar su aspecto inicial (*i.e.* mantener su pendiente original). Se optó por analizar bajo el modelo de talud infinito debido a que el material de desecho se colocará en un espesor de 5 m. Se cree que el nivel de aguas donde la presión intersticial es igual a la atmosférica será paralelo a la superficie de la interfase material–roca y ascenderá como máximo a una altura de 3 m desde la interfase. En la interfase se calculó que se obtendría un ángulo de fricción interna efectiva igual a 30 ° y cohesión efectiva de 10 kN m^{-2}. El peso unitario saturado del material es de 19 kN m^{-3}. Se solicita calcular f_s a través de los ábacos de la Figura 2.2; y luego verificar numéricamente usando la Eq. 2.10.

Solución 2.2. Por la geometría del problema los valores de los espesores se dividen por $\cos 60 = 0.5$ para dar las longitudes verticales de: $d = 10$ m y $d_w = 6$ m; por tanto el valor de m es igual a $3/5$. Se asumirá el valor del peso unitario del agua igual a 10 kN m^{-3}.

Se calcula entonces

$$\begin{aligned} r_u &= \frac{\gamma_w}{\gamma_{sat}} m \cos^2\beta. \\ &= \frac{10}{19} \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2. \\ &= 0.08. \end{aligned}$$

También calculamos el parámetro que lo llamaremos C, dado por

$$\begin{aligned} C &= \frac{c'}{\gamma_{sat} d \tan\phi'}. \\ &= \frac{10\sqrt{3}}{19 \times 10 \times 3}. \\ &= 0.03. \end{aligned}$$

Usaremos los dos primeros ábacos, para $r_u = 0$ y $r_u = 0.25$, donde ubicamos para el ángulo $\beta = 60\,^\circ$ los dos valores de $f_s/\tan\phi'$ para $C = 0$ y $C = 0.25$.

Para $r_u = 0$ tenemos un valor aproximado de $f_s/\tan\phi = 0.8$ con $C = 0$, y un valor de $f_s/\tan\phi = 1.3$ para $C = 0.25$. Luego, interpolamos para $C = 0.03$; en el código sería `fs_TanPhi000 =interp1( [0, 0.25], [0.8, 1.3], 0.03, 'linear')`.

Lo mismo hacemos para el ábaco de $r_u = 0.25$, donde $f_s/\tan\phi = 0$ para $C = 0$, y $f_s/\tan\phi = 0.9$ para $C = 0.25$. La interpolación en $C = 0.03$ sería en código `fs_TanPhi025 =interp1 ( [0, 0.25], [0, 0.9], 0.03, 'linear')`.

Finalmente hacemos la última interpolación según la implementación de `fs_TanPhi =interp1( [0, 0.25], [fs_TanPhi000, fs_TanPhi025], 0.08, 'linear')`; donde obtenemos que para $r_u = 0.08$ se tiene $f_s/\tan\phi' \approx 0.62$.

Finalmente, despejamos f_s porque conocemos $\tan\phi' = 0.58$; y tenemos que nuestro talud es inestable porque $f_s \approx 0.36$.

Si hacemos el cálculo numérico en la Ec. 2.10 tenemos

$$\begin{aligned} f_s &= \frac{(\gamma_{sat} - m\gamma_w)\, d \cos^2\beta \tan\phi' + c'}{\gamma_{sat} d \sin\beta \cos\beta}. \\ &= \frac{(19 - 0.6 \times 10)5 \times 0.25 \times 0.58 + 10}{19 \times 5 \times 0.87 \times 0.50}. \\ &= 0.47. \end{aligned}$$

Ambos valores difieren pero no lo suficiente como para tener distintas conclusiones, que la condición del talud que se está proyectando es inestable. □

2.1.7. *Influencia de flujo hidráulico*

Es importante tomar en cuenta que la situación real es mucho más compleja debido a que el valor de f_s puede variar mucho con sólo tener un valor diferente de la presión intersticial hidrostática (*i.e.* condición sin flujo). La presión intersticial depende de la dirección del flujo, que pese a que el nivel freático podría ser paralelo a la superficie del terreno y de ruptura —como estuvo trabajando arriba— la dirección de flujo no necesariamente acompaña de forma paralela al nivel freático.

Aun así, para un análisis un poco menos complejo, se asume que el suelo por encima del nivel freático no genera presiones intersticiales negativas y que a partir de ese nivel hacia arriba representa la presión intersticial nula. Asimismo, se mantiene la condición particular donde se tiene un flujo de agua isótropo con valores de la conductividad hidráulica iguales en todos los sentidos.

La magnitud de la presión intersticial u para cada dirección de flujo respecto a la inclinación del talud —donde α es la dirección del flujo contraria a la dirección del talud dado por el ángulo de las líneas de flujo respecto a la línea horizontal— se puede determinar según la siguiente ecuación general

$$u = \gamma_w \cos\beta \left[\tan\beta \tan(\beta+\alpha) + 1\right] \, d_w. \tag{2.20}$$

Por ejemplo, cuando el flujo es paralelo a la superficie de ruptura $-\alpha = \beta$, con $d_w = md$ se tiene que

$$u = \gamma_w \cos\beta \; md;$$

sin embargo, se usa la expresión de u en términos cuadrados de coseno

$$u = \gamma_w \cos^2\beta \; md.$$

Debido a que la presión intersticial será un factor que modificará la expresión de f_s, entonces es preferible colocar la expresión resultante de f_s en función de u sin desarrollarla. Luego, para definir una expresión o una serie de valores a u, se tendrá que verificar en cuál tipo de régimen hidráulico y de flujo este prevalece.

En este caso, para estimar u no sólo es de interés conocer la presión intersticial del flujo en el modelo también es importante conocer las cargas hidráulicas (h_u) a lo largo de la base de la dovela para calcular la fuerza de empuje sobre la base. Sin embargo, dicha fuerza sólo será posible hallarla si se conoce el gradiente hidráulico que produce el flujo (i) en ese tramo; y para conocer este último se tiene que conocer el punto más alto y más bajo de la superficie freática del flujo, es decir toda la red de flujo y toda la geometría del talud y sus condiciones de frontera. La Figura 2.3 muestra un ejemplo de esta situación para el caso de la cara aguas abajo de un terraplén.

Conocer el gradiente hidráulico del flujo requiere tener como dato de entrada la geometría total del talud, las condiciones de contorno que genera el flujo, tanto los contornos

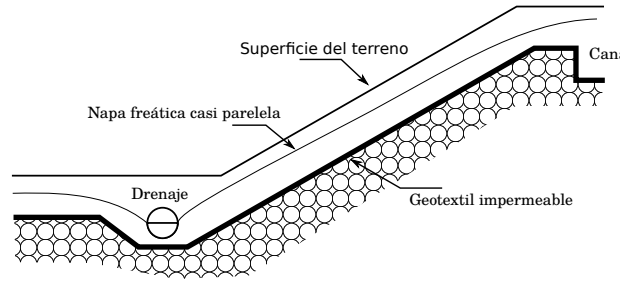


Figura 2.3 Terraplén donde se puede aplicar el modelo de talud infinito.

impermeables como las superficies que aportan con flujo como las que expulsan flujo, y el caudal de este flujo. Es decir, resolver un problema de flujo de agua en medio poroso. Esto implica complicar aún más el modelo que era inicialmente *simple* en el talud infinito, pero esto es para el buen fin de reducir las incertezas. Habrá que decidirse qué ventajas tiene la decisión de tomar o no en cuenta el flujo, según las incertezas que se quiera reducir.

Debido a que en un modelo de talud infinito las condiciones de contorno que dan lugar al flujo pueden ser variadas, la red de flujo que se forme no es obligatoriamente lineal; también puede presentarse una red de flujo curvilíneo y puede salir o entrar de él o hacia el talud en cualquier punto de la ladera.

En este sentido Iverson [39] dedujo una ecuación de flujo en régimen estacionario general para taludes infinitos en medios porosos homogéneos saturados. Si se asume un sistema coordenado ortonormal dextrógiro bidimensional con el eje de las abscisas paralelo a la línea de pendiente del talud y dirección contraria a la pendiente ascendente del mismo (*i.e.* en sentido de la dirección de flujo), con origen en el punto más alto de él, entonces la carga hidráulica en cualquier punto está dado por

$$h(x,y) = -q_{\mathrm{y}} \int_{(1-m)d}^{y} \frac{1}{k_{yy}} \mathrm{d}y - \left(x - \frac{k_{xy}}{k_{yy}} y \right) \sin\beta - (1-m)d \left(\frac{k_{xy}}{k_{yy}} \sin\beta + \cos\beta \right). \quad (2.21)$$

Observe que la solución depende de un caudal q_{v} que tiene que ser un dato de entrada.

Una importante hipótesis de [39] es que la superficie freática es también una equipotencial nula (igual a todos los casos analizados). Esto es común cuando se analiza el flujo sin tomar en cuenta el suelo parcialmente saturado por encima de la línea freática. Sin embargo, hoy en día se tiene todos los conocimientos para abordar el problema de la estabilidad del talud infinito también bajo la teoría de los suelos insaturados.

Obtenida la red de flujo, es necesario tomar en cuenta (en este análisis de estabilidad del talud) la fuerza de empuje del agua (*drag force*) por flujo (*i.e.* por la presencia de gradiente hidráulico i) en la base de la dovela. Esta fuerza por volumen de agua (F_{w}) es

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{w}} &= \gamma_{\mathrm{w}} V_{\mathrm{w}} i \\ &= \gamma_{\mathrm{w}} m d a\, i. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Si ésta se proyecta paralelo y perpendicular a la superficie de ruptura (s) y se distribuye sobre la misma superficie, entonces se obtiene la componente paralela y la componente perpendicular de los esfuerzos

$$\sigma_{\mathrm{Fw}\perp} = -i\,\gamma_{\mathrm{w}} m d \cos(90+\alpha+\beta)\cos\beta, \tag{2.23a}$$

$$\sigma_{\mathrm{Fw}\parallel} = i\,\gamma_{\mathrm{w}} m d \sin(90+\alpha+\beta)\cos\beta. \tag{2.23b}$$

El ángulo α es el mismo ángulo descrito antes que define la dirección del flujo respecto la línea horizontal.

Por tanto, la influencia del flujo de agua en el modelo de talud infinito se puede expresar de la siguiente forma

$$f_{\mathrm{s}} = \frac{\left\{[m\gamma_{\mathrm{sat}} + (1-m)\gamma^*]\, d\cos^2\beta - i\,\gamma_{\mathrm{w}} m d \cos(90+\alpha+\beta)\cos\beta - u\right\}\tan\phi' + c'}{[m\gamma_{\mathrm{sat}} + (1-m)\gamma^*]\, d\sin\beta\cos\beta + i\,\gamma_{\mathrm{w}} m d \sin(90+\alpha+\beta)\cos\beta}. \tag{2.24}$$

En el caso de un flujo paralelo a la superficie del terreno y paralelo a la superficie de ruptura ($\alpha = -\beta$), los esfuerzos resultan en

$$\sigma_{\mathrm{Fw}\perp} = 0, \tag{2.25a}$$

$$\sigma_{\mathrm{Fw}\parallel} = \gamma_{\mathrm{w}} m d \cos\beta\; i. \tag{2.25b}$$

Ejercicio 2.3. Un talud se construirá en un suelo donde los parámetros drenados son: $c' = 0\ \mathrm{kN\ m^{-2}}$ y $\phi' = 36°$. Se asumirá que la superficie de agua ocasionalmente llegará a la superficie del talud con un flujo paralelo a la superficie del terreno. Determine el máximo ángulo del talud para un factor de seguridad de 1.5, asumiendo que una superficie potencial de ruptura paralela a la superficie del terreno se desarrolla a 3 m por debajo de ésta. Luego indique ¿Cuál podría ser el factor de seguridad del talud, construido a este ángulo, si la superficie de agua está muy por debajo de la superficie de ruptura? El peso unitario saturado del suelo es de $19\ \mathrm{kN\ m^{-3}}$.

Solución 2.3. El máximo ángulo del talud para un factor de seguridad de 1.5 es de $\beta = 13°$, y el factor de seguridad para ese ángulo para esa condición es de $f_{\mathrm{s}} = 3.1$. □

Telling [81, 80] propuso una expresión semiempírica del factor de seguridad para el caso particular de un talud infinito en un suelo drenante incohesivo (*i.e.* $c' = 0$); donde el nivel de agua coincidía con la superficie del terreno (*i.e.* $m = 1$) y para una condición de flujo anisótropo estacionario paralelo a la superficie del talud (*i.e.* donde la permeabilidad en dirección horizontal y vertical son distintas)

$$f_s = \frac{\left[1 - \left(\gamma_w \gamma_{sat}^{-1}\right) f \sec^2 \beta\right] \tan \phi'}{\tan \beta}, \tag{2.26}$$

siendo $f = \left(1 + k \tan^2 \beta\right)^{-1}$; $k = {}^{k_H}/_{k_V}$; k_H la permeabilidad horizontal, y k_V la permeabilidad vertical, β el ángulo de inclinación del talud, y γ_w, γ_{sat} y ϕ' los valores asumidos usualmente en este texto.

Por ejemplo, la variación de f_s con $k = (1; 5; 10; 25; 50; 100)$ para β igual a $11\,^\circ$, ϕ' igual a $25\,^\circ$ y γ_{sat} igual a $17\,\mathrm{kN\,m^{-3}}$ es de forma respectiva $f_s = (1.01; 1.19; 1.36; 1.66; 1.90; 2.10)$.

El Listado de Código 2.2 hace uso de la función `tellingequation` para el cálculo del factor de seguridad.

Listado 2.2. Cálculo del f_s, donde se toma en cuenta la ecuación de Telling.

```
% tellingequationSCR
gammaSat =17.00; % in kN m^{-3}
gammaW =9.81; % in m s^{-1}
angTaludDeg =11; % in degrees
angFricIntEfectDeg =25; % in degrees
k =[1, 5, 10, 25, 50, 100]; % in 1

safetyFactor =tellingequation( gammaSat, gammaW, angTaludDeg,...
    angFricIntEfectDed, k );
```

□

La debilidad de la fórmula de Telling es que no toma en cuenta el empuje por debajo de la dovela por gradiente hidráulico. En el caso que $k = {}^{k_H}/_{k_V} = 1$ entonces se llegaría al caso de una permeabilidad isótropa, pero esta reducción resulta ser la expresión para una condición sin flujo igual a la Ec. 2.4. De este modo, la expresión de Telling sería incompleta y contradictoria en sus suposiciones: que no tiene flujo pero que existe una anisotropía en la conductividad hidráulica.

2.1.8. Influencia de la vegetación y árboles

Por lo general, el material suelto que está por encima de uno más consolidado soporta los nutrientes de la vegetación y árboles que crecen sobre la superficie del terreno. En este caso es necesario tomar en cuenta la influencia de la parte vegetal en el modelo; siguiendo nuestro caso reducido donde el flujo es paralelo a la superficie de ruptura.

De este modo, el modelo representado por la ecuación 2.24 se extiende a la siguiente expresión

$$f_s = \frac{\left\{\left\{q_{ta} + [m\gamma_{sat} + (1-m)\,\gamma^*]\,d\right\}\cos^2\beta - i\,\gamma_w md\cos(90+\alpha+\beta)\cos\beta - u\right\}\tan\phi' + \ldots}{\left\{q_{ta} + [m\gamma_{sat} + (1-m)\,\gamma^*]\,d\right\}\sin\beta\cos\beta + i\,\gamma_w md\sin(90+\alpha+\beta)\cos\beta} \tag{2.27}$$

$$\frac{\ldots + (c' + c_r)}{[\cdot]}.$$

donde c_r es la cohesión que aportan las raíces de la vegetación y árboles a la cohesión del suelo, q_{ta} es la carga distribuida sobre la línea a debida a la presencia de los árboles únicamente, y γ_w es el peso unitario del agua igual a 9.81 kN m^{-3}.

Para el caso donde se supone que $u = \gamma_w md\cos^2\beta$ y existe flujo de agua paralelo a la superficie del terreno, o si no existe flujo pero el suelo tiene una condición saturada hidrostática, se tiene la siguiente expresión [32]:

$$f_s = \frac{\{q_{ta} + [m\gamma_{sat} + (1-m)\,\gamma^* - m\gamma_w]\,d\}\cos^2\beta\tan\phi' + (c' + c_r)}{\{q_{ta} + [m\gamma_{sat} + (1-m)\,\gamma^*]\,d\}\sin\beta\cos\beta}. \tag{2.28}$$

La ecuación 2.27 tiene todas las posibles variables a tomar en cuenta en el mecanismo de ruptura plana, pero dejar de ser práctica debido a que se tendría que hallar la red de flujo en el medio. De este modo, si se asume un flujo paralelo a la superficie del terreno y de la superficie de ruptura, el modelo es más sencillo y se puede usar en las estimaciones iniciales de la estabilidad de grandes regiones mediante el uso de mapas y sistemas de información geográfica.

Ejercicio 2.4. Calcule el factor de seguridad al deslizamiento de una ladera plana con pendiente $V : H = 2.3 : 1$, que tiene la posibilidad de romperse en otro plano paralelo a la superficie del terreno pero a 5 m de profundidad. El nivel freático también es paralelo a la superficie y está ubicado a una profundidad (z_w) de 2 m, y se asume un flujo paralelo a la superficie del terreno. Las propiedades del suelo son $c' = 40$ kN m^{-2} y $\phi' = 36°$. Las condiciones de humedad por encima del nivel freático son casi saturadas. El peso unitario saturado del suelo es $\gamma_{sat} = 19$ kN m^{-3}. Las investigaciones forestales han mostrado que el aporte de las raíces al suelo es de $c_r = 1$ kN m^{-2} pero que incrementan el peso de forma uniforme en un valor de $q_{ta} = 0.7$ kN m^{-2}.

Solución 2.4. Para emplear la ecuación 2.28 se hace el cálculo de la distancia relativa de la altura de agua y altura de la dovela

$$m = \frac{d - z_w}{d};$$

que da igual a 0.6.

Luego, al implementarla se obtiene que el factor de seguridad es igual a 1.4.

Se puede resolver este problema implementando la Ec. 2.28 en una función MATLAB® que se la llama `infiniteslopefs`. Para darle un mejor orden las variables de entradas se agrupó en estructuras; de este modo las variables de entrada se escribe así:

```
slopeGeomSTR =struct( 'betaDeg', (atan(2.3)*180/pi), 'd', 5 );
waterCondSTR =struct( 'm', ((5-2)/5), 'gammaW', 9.81 );
soilPropsSTR =struct( 'phiDeg', 36, 'c', 40, 'gammaSat', 19, ...
   'gammaAste', 19 );
vegetPropsSTR =struct( 'cr', 1, 'qta', 0.7 );
```

Finalmente, el valor buscado de f_s se obtiene de escribir

```
fs =infiniteslopefs( slopeGeomSTR, waterCondSTR, ...
  soilPropsSTR, vegetPropsSTR );
display( ['The safety factor against planar failure in an infite slope is
   ', ...
   num2str(fs, '%3.1f'), '.'] );
```

□

2.1.9. Carga horizontal sísmica semiestática

Para un análisis sísmico semiestático los esfuerzos que se generan perpendicular y paralelo a la superficie de ruptura resultan ser

$$\sigma_{\perp s} = -k_h\,[m\gamma_{sat} + (1-m)\gamma^*]\,d\sin\beta\cos\beta; \tag{2.29a}$$

$$\sigma_{\parallel s} = k_h\,[m\gamma_{sat} + (1-m)\gamma^*]\,d\cos^2\beta. \tag{2.29b}$$

Aunque parezca lógico, uno puede pensar que $\sigma_{\parallel s}$ tiene que se negativo; pero tome en cuenta que este esfuerzo desestabilizante tiene que sumarse (añadirse) con los demás esfuerzos desestabilizantes para que aumenten el denominador del concepto de factor de seguridad. Por el otro lado, $\sigma_{\perp s}$ sí es negativo, porque es una fuerza que disminuye el esfuerzo normal que va en favor de la resistencia al corte del plano de ruptura.

2.1.10. Casos especiales de cargas

Dentro de los casos especiales de cargas se nombra aquellas situaciones particulares de *estados de carga* que la influencia antrópica puede proporcionar a un talud dentro del modelo de talud infinito. Estos casos son por ejemplo un anclaje inclinado de estabilización, o una carga puntual vertical de desestabilización (representativo de una fundación superficial).

La condición *sine qua non* de estos casos es que el mismo estado de fuerzas se tiene que repetir en cada una de las dovelas adyacentes de la analizada. De no ser así el sistema

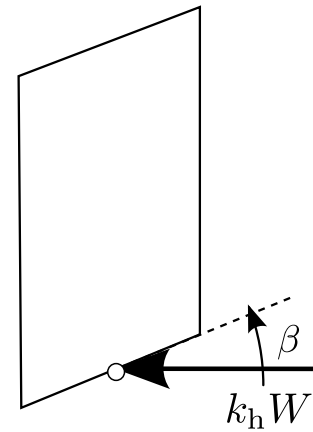


Figura 2.4 Carga horizontal sísmica semi-éstática.

no tendría equilibrio de fuerzas en las condiciones de contorno de cada dovela, y sería un problema con mayores números de incógnitas que de ecuaciones *i.e.* un sistema que no tendría soluciónsin antes asumir alguna función entre las fuerzas de contacto de las dovelas.

2.1.10.1. Anclaje estabilizante

En el caso de tener un anclaje inclinado en sentido contrario al deslizamiento e inclinación tal que favorezca la estabilización, los esfuerzos normal y paralelo evaluados en la base de la dovela son

$$\sigma_{\perp \mathrm{a}} = \frac{F_{\mathrm{a}}}{a} \cos\left(\theta_{\mathrm{a}} + \beta\right) \cos\beta; \tag{2.30a}$$

$$\sigma_{\parallel \mathrm{a}} = \frac{F_{\mathrm{a}}}{a} \sin\left(\theta_{\mathrm{a}} + \beta\right) \cos\beta. \tag{2.30b}$$

2.1.10.2. Carga puntual desestabilizante

Si se tiene una carga puntual estática en sentido igual al deslizamiento pero de compresión contra la superficie de ruptura, que represente por ejemplo una fundación inclinada o no, los esfuerzos normal y paralelo evaluados en la base de la dovela son

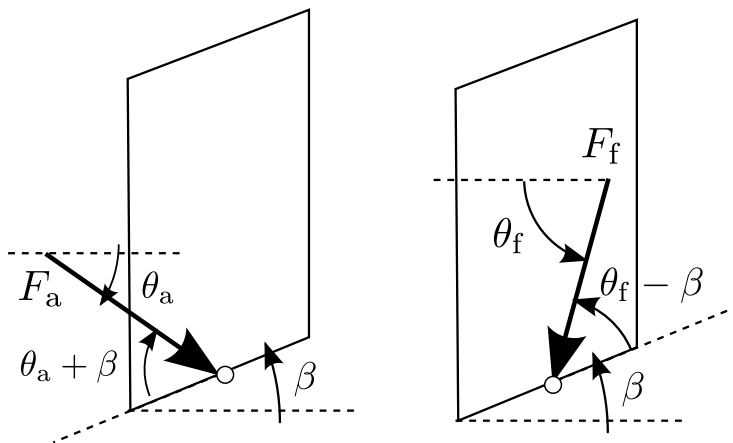
$$\sigma_{\perp \mathrm{f}} = \frac{F_\mathrm{f}}{a} \sin(\theta_\mathrm{f} - \beta) \cos\beta; \tag{2.31a}$$

$$\sigma_{\parallel \mathrm{f}} = \frac{F_\mathrm{f}}{a} \cos(\theta_\mathrm{f} - \beta) \cos\beta. \tag{2.31b}$$

Para el caso particular de que la fuerza sea vertical, $\theta_\mathrm{f} = 90\,^\circ$ entonces

$$\sigma_{\perp \mathrm{fv}} = \frac{F_\mathrm{f}}{a} \cos^2\beta; \tag{2.32a}$$

$$\sigma_{\parallel \mathrm{fv}} = \frac{F_\mathrm{f}}{a} \sin\beta \cos\beta. \tag{2.32b}$$



(a) carga estabilizante (anclaje) (b) carga des-estabilizante (fundación)

Figura 2.5 Cargas estabilizantes y des-estabilizantes en la dovela.

2.2. Método de equilibrio límite para rupturas curvas

Los problemas de análisis de estabilidad de taludes para la mecánica de suelos clásica normalmente se abordan en primera instancia mediante los *métodos de equilibrio límite* (LEM de las siglas en Inglés de *Limit Equilibrium Method*) para superficie de rupturas curvas; los cuales existen en una variedad que obliga a clasificarlos.

Por tanto, los LEM se clasifican en: métodos inexactos y los exactos; donde los inexactos se dividen en el método del círculo de fricción y el método de las dovelas. El método de las dovelas se dividen en aproximados y precisos. Mientras que los métodos exactos tienen nombres específicos de los autores que los plantearon; por ejemplo, el método de Spencer [74], el método de Morgenstern & Price [57], método de Bishop riguroso, y el método Global de Equilibrio Límite o llamado método GLE (de las siglas en Inglés de *Global Limit Equilibrium*) [17]. La Figura 2.6 muestra la estructura relacional de esta clasificación.

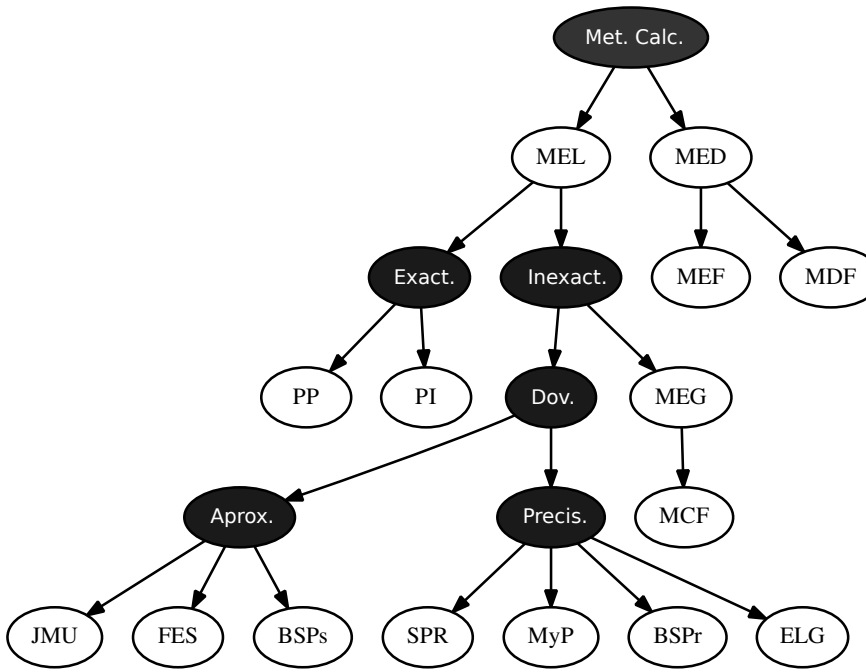


Figura 2.6 Clasificación de los métodos de cálculo bidimensionales de estabilidad de taludes. MEL: método de equilibrio límite; MED: método de esfuerzo-deformación; MEF: método de los elementos finitos; MDF: método de las diferencias finitas; PP: ruptura plana paralela a la superficie; PI: ruptura plana inclinada a la superficie; MEG: método de estabilidad global; MCF: método del círculo de fricción; JMU: método de Jambú; FES: método de Felenuius; BSPs: método de Bishop simplificado; SPR: método de Spencer; MyP: método de Morgenstern y Price; BSPr: método de Bishop riguroso; ELG: método de equilibrio global; Met. Calc.: métodos de cálculo; Exact: exactos; Inexact: inexactos; Dov: de dovelas; Aprox: aproximados; Precis: precisos.

En el método de las dovelas el inconveniente radica en la indeterminación del planteamiento estático de la solución. Cada dovela de las n que conforman la geometría de la

superficie de ruptura con la superficie del terreno está sometida a ocho variables: dos fuerzas tangenciales a las caras verticales de la dovela (*i.e.* V_i y V_{i+1}), dos fuerzas normales a las caras verticales de la dovela (*i.e.* E_i y E_{i+1}), una fuerza tangencial (T) y normal (N) en la base de la dovela, dos abscisas desde la base de la dovela hacia el punto de aplicación de las fuerzas normales a las caras verticales (*i.e.* b_i y b_{i+1}).

Debido a que dos dovelas adyacentes comparten una misma cara, para el caso de n dovelas en la discretización se tiene las siguientes variables a resolver:

- fuerzas tangenciales a las caras verticales de la dovela, en $(n-1)$ incógnitas;
- fuerzas normales a las caras verticales de la dovela, en $(n-1)$ incógnitas;
- abscisas hacia las fuerzas normales a las caras verticales de la dovela, en $(n-1)$ incógnitas;
- fuerzas tangenciales a las base de la dovela, en n incógnitas;
- fuerzas normales a las base de la dovela, en n incógnitas;
- el factor de seguridad global, en 1 incógnita.

Por otro lado, por cada dovela se tiene tres ecuaciones de equilibrio estático en el plano, dados por la suma de

- fuerzas horizontales, en n cantidades;
- fuerzas verticales, en n cantidades;
- momentos, en n cantidades.

La cantidad de incógnitas sería de este modo igual a $(5n-2)$ y la cantidad de ecuaciones de tan solo $3n$ ecuaciones.

Para posibilitar una solución a este problema se puede incrementar el número de ecuaciones si se define las relaciones esfuerzo y deformación del material, o se puede disminuir las incógnitas conociendo alguno de sus valores por otros métodos. Por ejemplo, se puede hacer un análisis esfuerzo deformación y dada una superficie de ruptura conocer todos los esfuerzos en las dovelas y por ende todas las fuerzas en las dovelas.

También para posibilitar una solución con la intención de disminuir el número de incógnitas se adopta alguna hipótesis, de modo de conocer de forma aproximada las fuerzas tangenciales y normales a las paredes verticales de las dovelas. Esto es lo que hacen los LEM aproximados. Mientras que los LEM precisos adoptan hipótesis de tal modo que las fuerzas tangenciales y normales a las paredes verticales a las dovelas sigan una ley general, que puede depender de una o pocas más variables relativas al material, pero que son conocidas.

Método de las dovelas: Bishop o Janbu.-

El método simplificado de las dovelas de Bishop para el análisis de la estabilidad de taludes es una rutina sencilla que obtiene buenos resultados. Luego que se expuso este método se hicieron mayores esfuerzos para desarrollar una teoría similar aplicable a taludes de cualquier forma de superficie de ruptura.

La cronología de los desarrollos tempranos es confusa, pero pareciera que fue del siguiente modo.

1. El artículo de Bishop fue presentado en una conferencia un año antes que aparezca publicada en las memorias. Investigaciones separadas permitieron a Janbu y Kenney llegar a un mismo resultado (Kenney trabajando bajo la dirección de Bishop en el Colegio Imperial de Londres).
2. Janbu publicó su método de estabilidad de taludes primero en 1955 en idioma alemán; sin embargo, en la explicación del método se identificaron errores.
3. La tesis de Kenney apareció un año después de la publicación de Janbu.
4. Posteriormente, Janbu volvió a publicar la forma correcta de las ecuaciones y en idioma Inglés, pero la redacción era en su mayoría incomprensible.
5. En ese lapso, Bishop convenció a Price, que fue uno de los autores del primer programa computacional de análisis de estabilidad (vea [49]) para probar las ecuaciones del programa de Kenney para deslizamientos no circulares.
6. Fue ahí donde se encontró que las ecuaciones básicas conducían a otros problemas numéricos cuando eran evaluadas a una alta precisión, debido a que no era posible definir el factor de seguridad de un deslizamiento con una alta certeza [*i.e.* con alrededor de 5 % como el mejor valor].
7. De este modo, Price y Morgenstern [56, 57] desarrollaron un método más sofisticado (también en el Colegio Imperial de Londres), cuyo nombre del método conservan los nombres de estos autores.
8. Esta vez, los autores estaban seguros de conocer que la complejidad en los cálculos ya no era más una limitante para difundir el uso del método, y esto aumentó aún más cuando se fue incrementando la disponibilidad de las computadoras.
9. Janbu desarrolló su método después, y publicó su procedimiento generalizado de dovelas en 1973[41], y un número más de métodos también aparecieron publicados a lo largo del fin de la década de los 60 y 70 del Siglo XX.

2.2.1. Análisis de ruptura circular en condiciones indrenadas

Observe que el análisis con $\phi = 0^\circ$ (que simula las condiciones indrenadas tomando $c = c_u$) es apropiado sólo para excavaciones temporales a corto plazo donde se asume una resistencia indrenada o de corto tiempo para controlar la estabilidad.

El método de la ruptura circular —para $\phi = 0^\circ$ y $c = c_u$— se esquematiza en la Figura 2.7, donde el talud se divide en un número conveniente de dovelas y el factor de seguridad es la razón de la suma de los momentos estabilizadores respecto la suma de los momentos desestabilizadores. De este modo, y refiriéndose a la Figura 2.7,

$$f_s = R\frac{\sum s_u l}{\sum W x}. \tag{2.33}$$

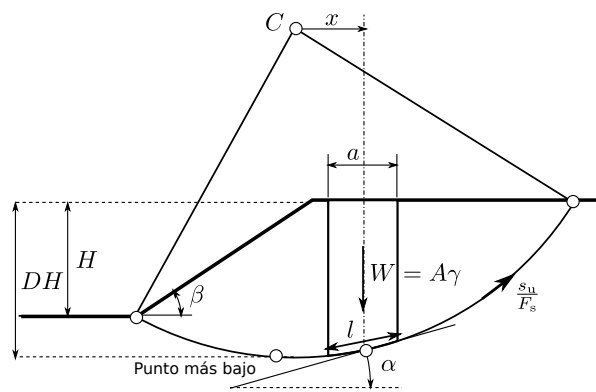


Figura 2.7 Esquema clave para el análisis de esfuerzos totales de un talud al asumir un deslizamiento circular por el método de las dovelas.

Observe que $x = R\sin\alpha$, $l = \sec\alpha$ y $W = pa$ da

$$f_s = \frac{\sum s_u \sec\alpha}{\sum p \sin\alpha} \tag{2.34}$$

para dovelas de ancho constante, que es la forma convencional para los cálculos a mano.

Las soluciones son posibles para geometrías simples y bajo las siguientes condiciones:

- resistencia a corte indrenada y constante;
- resistencia a corte que incrementa en forma lineal con la profundidad desde un valor cero desde la superficie del terreno [25].

Ejercicio 2.5. Un talud de 45° se excava a una profundidad de 8 m en una capa profunda de arcilla saturada de peso unitario igual a 19 kN m^{-3} donde sus parámetros relevantes de resistencia a corte son $c_u = 65$ kN m^{-2} y $\phi_u = 0\,°$. Determine el factor de seguridad de la superficie de ruptura de prueba mostrada en la Figura 2.8.

Solución 2.5. El área *ABCD* de la Figura 2.8 es 70 m^2, por tanto el peso de la masa de suelo es 70×19 kN m^{-1}. El centro de gravedad de la misma sección queda a 4.5 m de *O* en dirección horizontal. El ángulo *AOC* es aproximadamente 89.5° y el radio *OC* es 12.1 m. La longitud de arco *ABC* se calcula a un valor de 18.9 m. Con esto, el factor de seguridad contra el deslizamiento es:

$$f_s = \frac{c_u L_a r}{W d}, \tag{2.35}$$

donde d es el brazo del momento que produce W hacia el centro del arco de la circunferencia de radio r. Haciendo operaciones, el factor de seguridad buscado es:

$$f_s = \frac{65 \times 18.9 \times 12.1}{1\,330 \times 4.5} = 2.48. \tag{2.36}$$

Este es un factor de seguridad que no necesariamente es el mínimo que represente a la superficie de ruptura más crítica. □

2.2.2. Análisis de ruptura circular en condiciones drenadas

El mecanismo de ruptura circular se muestra en la Figura 2.9(a) y las fuerzas que actúan en una dovela individual en la Figura 2.9(b).

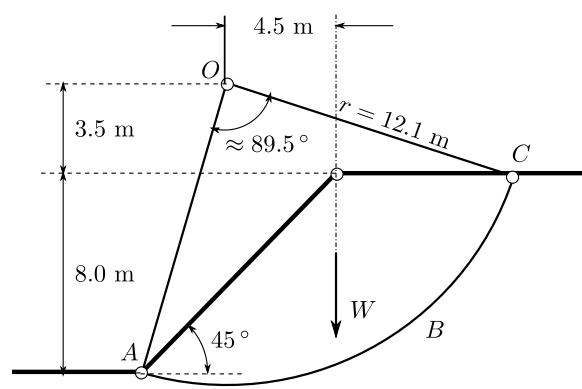


Figura 2.8 Figura para el Ejercicio 2.5 .

El polígono de fuerzas se muestra en la Figura 2.9(c). Los puntos importantes de notar son los siguientes:

- el factor de seguridad es

$$f_s = \frac{\text{esfuerzos estabilizantes}}{\text{esfuerzos movilizantes}}$$

y por tanto la resistencia movilizada se da según

$$s = \frac{c'}{f_s} + (\sigma_n - u)\frac{\tan\phi'}{f_s};$$

- no es posible una solución analítica generalizada, y se requiere de una solución numérica [7];
- para estimar los valores de σ_n en cada punto de la superficie de ruptura se usa el método de las dovelas de Fellenius [24] que se publicó por primera vez en el congreso de grandes presas.

Para el caso de la solución planteada por Bishop [6], que se plantea en este texto, observe la Figura 2.9; el análisis es el siguiente.

La resistencia mobilizadora es:

$$s = \frac{c'}{f_s} + (\sigma_n - u)\frac{\tan\phi'}{f_s}. \tag{2.37}$$

El esfuerzo normal total en la base de la dovela es

$$\sigma_n = \frac{P}{l} \quad \text{de donde} \tag{2.38a}$$

$$s = \frac{c'}{f_s} + \left[\frac{P}{l} - u\right]\frac{\tan\phi'}{f_s} \tag{2.38b}$$

La fuerza de corte s que actúa en la base de la dovela resulta ser sl; y tomando momentos alrededor de O se tiene lo siguiente para un equilibrio límite:

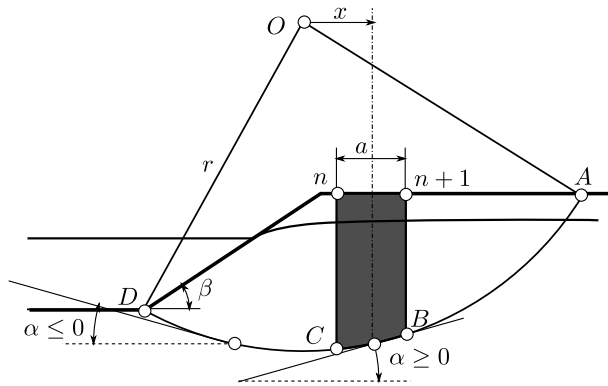
$$\sum Wx = \sum SR = \sum slR. \tag{2.39}$$

De la Eq. 2.38b se deduce que

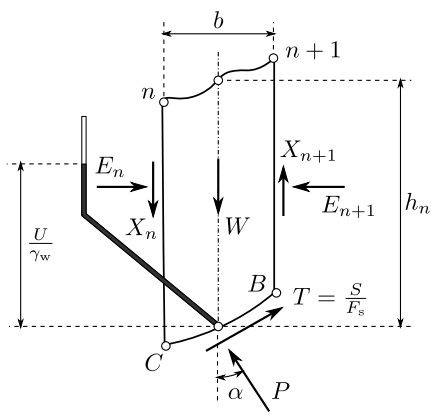
$$\sum Wx = R\sum \frac{c'l}{f_s} + (P - ul)\tan\phi' f_s; \tag{2.40a}$$

es decir,

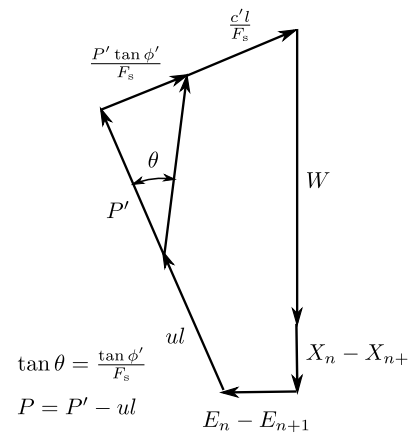
$$f_s = \frac{R}{\sum Wx}\sum \left[c'l + (P - ul)\tan\phi'\right]. \tag{2.40b}$$



(a) mecanismo de ruptura circular



(b) polígono de fuerzas



(c) fuerzas actuando en una dovela individual

Figura 2.9 Esquema de la definición para el análisis de esfuerzos efectivos en un talud, método de las dovelas.

Para obtener P se resuelve normal a la superficie de ruptura, con

$$P = (W + X_n - X_{n-1})\cos\alpha - (E_n - E_{n-1})\sin\alpha. \tag{2.41}$$

Si se inserta la ecuación 2.41 en la ecuación 2.40b se tiene

$$f_s = \sum \left\{ c'l + \tan\phi' \left(W\cos\alpha - ul\right) + \tan\phi' \left[(X_n = X_{n-1})\cos\alpha - (E_n - E_{n-1})\sin\alpha\right] \right\}. \tag{2.42}$$

Debido a que no hay fuerzas externas en el talud, se considera que la suma de las fuerzas internas deberían ser iguales a cero; es decir,

$$\sum (X_n - X_{n+1}), \tag{2.43a}$$

$$\sum (E_n - E_{n+1}). \tag{2.43b}$$

Pero los términos en $X_n \ldots$ y $E_n \ldots$ no desaparecen, ellos sólo desaparecen si ϕ' y α son constantes; es decir, se tiene ruptura en un plano.

Una propuesta de solución dada por la Agencia de Administración de Recursos Hídricos de los EE.UU. (USBR: *United States Bureau of Reclamation*) es de asumir

$$\sum \tan\phi' \left[(X_n - X_{n-1}) \cos\alpha - (E_n - E_{n+1}) \sin\alpha \right] = 0.$$

De este modo, si se iguala $x = R\sin\alpha$ se tiene que

$$f_s = \sum \left[c'l + \tan\phi' \left(W\cos\alpha - ul \right) \right]. \tag{2.44}$$

Esta forma de solución da resultados por el lado de la conservación, particularmente para círculos profundos.

En términos simples, se resolvió el peso total W normal a la superficie de ruptura y luego se substrajo la fuerza debido a la presión intersticial ul (ver la ecuación 2.44).

Siguiendo la fórmula de Taylor se puede considerar que el peso sumergido de la dovela es igual a $W - ub$ y se resuelve como sigue:

$$\begin{aligned} (W - ub)\cos\alpha &= W\cos\alpha - u\cos\alpha \frac{1}{\sec a} \\ &= W\cos\alpha - ul\cos^2\alpha; \end{aligned}$$

y se obtiene que

$$f_s = \frac{1}{\sum W\sin\alpha} \sum \left[c'l + \tan\phi' \left(W\cos\alpha - ul\cos^2\alpha \right) \right]. \tag{2.46}$$

Para evitar estos errores, se regresa a la Eq. 2.40b de arriba, donde se coloca $P' = (P - ul)$ y se resuelve verticalmente de forma de eliminar los términos E_n como sigue:

$$W + X_n - X_{n-1} = ul\cos\alpha + P'\cos\alpha + P'\frac{\tan\phi'}{f_s}\sin\alpha + \frac{c'}{f_s}l\sin\alpha;$$

entonces,

$$P' = \frac{W + X_n - X_{n-1} - l\left[u\cos\alpha + \left(c' f_s^{-1} \sin\alpha \right) \right]}{\cos\alpha + f_s^{-1}\tan\phi'\sin\alpha}. \tag{2.47}$$

Substituyendo esta ecuación en la Eq. 2.40b y colocando $l = b\sec\alpha$, $x = R\sin\alpha$ se llega a que

$$f_s = \frac{\sum\left\{c'b + \tan\phi'\left[W - ub + (X_n - X_{n+1})\right]\frac{\sec\alpha}{1+f_s^{-1}\tan\phi'\tan\alpha}\right\}}{\sum W\sin\alpha}. \tag{2.48}$$

Con una suficiente exactitud para los fines más prácticos, se puede asumir que $X_n - X_{n+1} = 0$. De ese modo se obtiene la solución simplificada de Bishop [6], que resulta ser igual a

$$f_s = \frac{\sum\left\{c'b + \tan\phi'\left(W - ub\right)\frac{\sec\alpha}{1+f_s^{-1}\tan\phi'\tan\alpha}\right\}}{\sum W\sin\alpha}; \tag{2.49}$$

que converge de forma rápida.

En el presente texto se ha desarrollado las funciones `interatefusbrsat`, `interateftaylorsat` y `interatefbishopsimpsat`, ellas que calculan de forma respectiva f_s por los métodos de la USBR, de Taylor y de Bishop (simplificado) respectivamente. En sí, el cálculo de f_s no toma muchas líneas de código; y para los dos primeros métodos las ecuaciones no necesitan iteraciones numéricas para llegar a la solución, mientras que la tercera sí.

Lo que consume varias líneas de código y varias otras funciones es el crear la estructura de datos de entrada para hacer correr las anteriores tres funciones, y el de mostrar de forma gráfica la solución del problema (*i.e.* el dibujo del talud con la superficie del terreno y el contorno de cálculo, la polilínea del nivel freático, el arco de circunferencia que representa la superficie de ruptura circular y la discretización de las dovelas).

Para ver cómo el código en MATLAB® se implementa para la solución de taludes con ruptura circular en materiales saturados en condiciones drenadas, se resuelve el Ejercicio 2.6 que se plantea adelante.

Para el caso especial de dovelas de igual ancho, la Eq. 2.49 se escribe como sigue:

$$f_s = \frac{\sum c' + (p-u)\tan\phi' m_{ff}^{-1}}{\sum p\sin\alpha}; \tag{2.50}$$

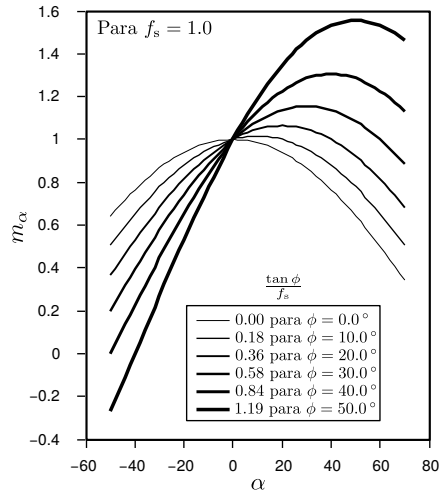
donde,

$$m_{ff} = \cos\alpha\left(1 + f_s^{-1}\tan\alpha\tan\phi'\right) \tag{2.51}$$

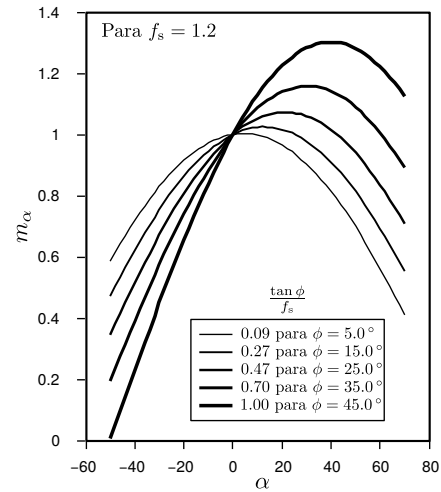
y donde p es el esfuerzo vertical total en la base de la dovela.

Los valores de m_{ff} se puede relacionar con ϕ', α y f_s en un ábaco previamente elaborado para acelerar los cálculos manuales. En este texto se puede generar cualquier tipo de ábaco con la función `malphaabacus` que posibilita variar los valores del ángulo de fricción interna y el factor de seguridad, tal como lo muestra la Figura 2.10.

Ejercicio 2.6. Encuentre el factor de seguridad al deslizamiento de un talud de 12 m de altura y un ángulo respecto la horizontal de 21.8 °; que tiene como material una arcilla saturada de resistencia mecánica dada por la envolvente de Mohr–Coulomb en estado saturado y drenado de $\phi' = 23$ ° y $c' = 18$ kPa. El nivel freático está a 5 m de profundidad



(a) Para $f_s = 1.0$ y $\phi' = \{0, 10, 20, \ldots, 50\}$.



(b) Para $f_s = 1.2$ y $\phi' = \{5, 15, 25, \ldots, 45\}$.

Figura 2.10 Ábaco de los valores $m_{\text{ff}} = \cos\alpha \left[1 + \left(\tan\alpha \tan\phi' f_s^{-1}\right)\right]$ de la solución de Jambu.

desde la superficie del terreno de la corona del talud, y por simplicidad se asume horizontal hasta que corta la superficie del terreno y de ahí coincide con la mencionada superficie. La superficie de ruptura que se desea analizar es una de forma de arco de circunferencia que corta el talud en dos puntos: uno en el punto *A* a 5.65 m de la corona del talud hacia atrás; y otro en el punto *B* que coincide con la pata del talud. El radio del círculo es de 34.49 m. El peso unitario del material en estado saturado es de γ_{sat} igual a 19.5 kN m^{-3}, y para todo material por encima del nivel freático se asumirá un peso unitario de γ^* de también 19.5 kN m^{-3}; por ser conservativo.

Solución 2.6. Definimos un polígono cerrado como el área de cálculo del problema; de tal modo, que esté dentro de ella el círculo de ruptura circular. Para esto, se definió que tanto desde la corona como desde la pata del talud se extiendan las líneas horizontales en 10 m, y que en profundidad se extienda desde la línea horizontal de la corona del talud un valor de 26.44 m.

Asumiremos un sistema coordenado cartesiano dextrógiro con el eje x horizontal de izquierda a derecha, y un eje vertical de abajo hacia arriba; ambos indicando sus sentidos positivos. Así de este modo, se tiene las coordenadas el polígono cerrado las que se muestra en la Tabla 2.1. Del mismo modo, las coordenadas de la superficie del nivel freático se muestran en la misma tabla.

La Figura 2.11 muestra el resultado que se obtiene luego de hacer correr el archivo de lotes `circularSlipSlope01SCR` para encontrar el factor de seguridad (por los tres métodos)

Cuadro 2.1 Coordenadas de los contornos y líneas de cálculo.

Punto	De la región de estudio en m	
	x	y
1	0	0
2	50	0
3	50	14.44
4	40	14.44
5	10	26.44
6	0	26.44

Punto	Del nivel freático en m	
	x	y
1	0	16.44
2	35	16.44
3	40	14.44
4	50	14.44

contra la estabilidad; que además usa otras funciones de auxilio para crear las variables de entrada del ejemplo y para dibujar el mismo.

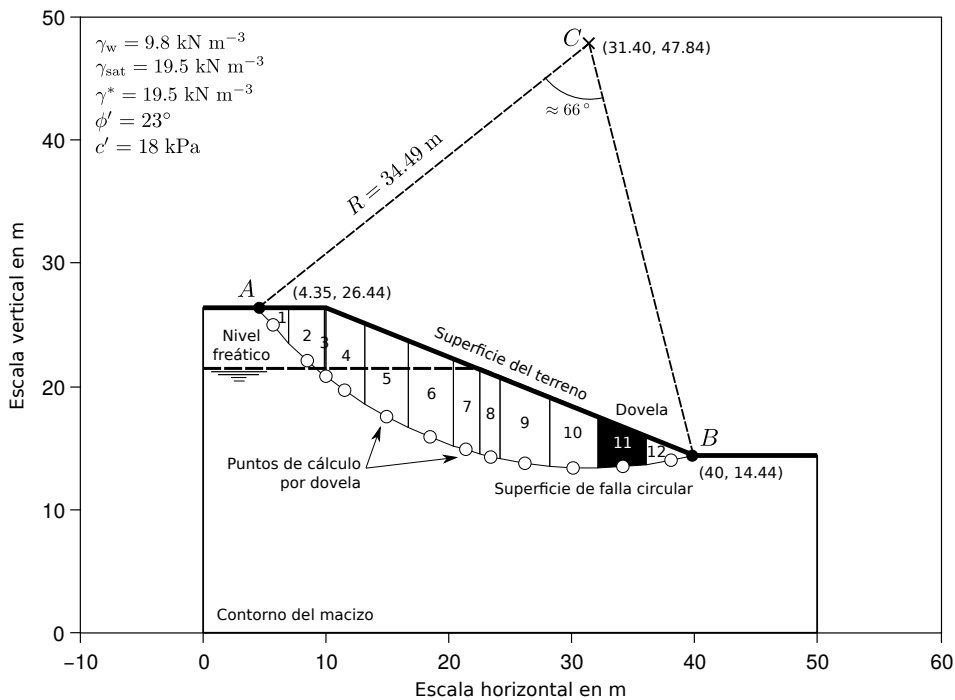


Figura 2.11 Esquema del ejercicio 2.6 para encontrar el factor de seguridad contra la estabilidad con el código elaborado.

Los factores de seguridad por el método de la USBR, Taylor y Bishop simplificado son de forma respectiva iguales a 1.43, 1.47 y 1.50. □

Ejercicio 2.7. Encuentre el factor de seguridad al deslizamiento del mismo talud del Ejercicio 2.6 pero ahora resuélvalo por el método de Fellenius; *i.e.* haciendo el equilibrio de momentos.

Solución 2.7. La solución es .... □

Método de las dovelas: las tres soluciones por los llamados *métodos inexactos*.-

En resumen se tienen tres soluciones de rápida implementación que son comunes, éstas son:

- la solución de la USBR,

$$f_s = \frac{1}{\sum W \sin\alpha} \sum \left[c' l + \tan\phi' \left(W \cos\alpha - ul \right) \right];$$

- la solución de Taylor que resuelve el peso sumergido y da valores de f_s mayores al de arriba,

$$f_s = \frac{1}{\sum W \sin\alpha} \sum \left[c' l \tan\phi' \left(W \cos\alpha - ul \cos^2\alpha \right) \right];$$

- la forma simplificada de la solución de Bishop,

$$f_s = \frac{\sum \left\{ c' b + \tan\phi' \left(W - ub \right) \frac{\sec\alpha}{1 + f_s^{-1} \tan\phi' \tan\alpha} \right\}}{\sum W \sin\alpha};$$

- la forma simplificada de la solución de Bishop dada por Jambu para dovelas espaciadas de forma constate,

$$f_s = \frac{\sum c' + (p - u) \tan\phi'}{m_{\text{ff}} \sum p \sin\alpha}.$$

Las imprecisiones que se introducen en la estimación de la estabilidad de los taludes no son únicamente por el uso de algún método de análisis, sino también por:

- mala interpretación de la realidad;
  - mecanismo de ruptura;
  - estado de esfuerzos.

- mala extrapolación de la realidad hacia el modelo;
- empleo de insuficientes y no apropiados —en cantidad y calidad— métodos de extracción de muestras;
- insuficientes métodos de ensayos.

Si aún así se presentara gran atención a los *ítems* mencionados arriba, el método de análisis con el más alto tratamiento matemático llevará a una impresión ficticia de precisión. Sin embargo, en muchos casos la homogeneidad del material que se analiza y sus condiciones de esfuerzos, en conjunción con la importancia del problema (*i.e.* estabilidad del talud) justifican el desarrollo de estos modelos matemáticos económicos y expeditos en comparación con los modelos físicos.

En [6] se menciona que los problemas típicos que se puede resolver con estos métodos de equilibrio límite son aquellos que involucran grandes cantidades de material a rellenar, remover o compactar, tales como para:

- el diseño de estructuras de retención (*e.g.* presas de tierra y embalses);
- el análisis de estabilidad a largo plazo de cortes;
- el análisis de estabilidad a largo plazo de taludes naturales.

Otros factores importantes que conducen a imprecisiones en el método son: la estimación de la forma y la posición de la superficie de ruptura, debido a que ésta varía inclusive en un terreno homogéneo según la distribución de la presión intersticial en la masa porosa; y la variación de los parámetros de resistencia dependiente del estado de esfuerzos de la masa.

2.3. La superficie de ruptura crítica

La clave del análisis de estabilidad de taludes es el determinar la superficie de ruptura más peligrosa (*i.e.* más crítica). Para ello existe una variedad de métodos de optimización globales cómo se describe en [78].

Algunos de los métodos de búsqueda de la superficie de ruptura crítica son por ejemplo:

- método por medio de algoritmos genéticos (GA) o llamado también método del algoritmo biónico;
- el método de la sección de oro (v.gr. *golden section method*);
- el método de la dicrotomía (v.gr. *dichotomy method*).

La optimización es el procedimiento matemático que logra seleccionar el mejor elemento —referente a ciertos criterios establecidos— de un conjunto de elementos o alternativas disponibles. Por ejemplo, una optimización simple consistiría de maximizar o minimizar una función matemática.

Entre los métodos de optimización, uno que emplea *algoritmos genéticos* llama la atención para encontrar la superficie de ruptura crítica debido a que tiene una buena adaptabilidad y evoluciona bien en el momento de encontrar la solución global óptima. Un ejemplo interesante se da cuando se usa este método para el caso sencillo de rupturas circulares bajo el método simplificado de Bishop [88].

Para solucionar a través del método GA, se puede usar las soluciones actuales de optimización global de funciones. En este caso se debe definir una función objetivo para ser minimizada, que en muchos de los casos y bajo condiciones geológicas complicadas —o cuando se da mucho detalle a los materiales del suelo— aquella solución no converge.

El objetivo de los métodos de búsqueda es el de encontrar el mínimo factor de seguridad f_s de una superficie de ruptura —normalmente asumida como un arco de círculo— por algún método que encuentra una solución global (*i.e.* SGS *Single Global Solution*).

Otra forma de encontrar la superficie de ruptura más probable es a través de minimizar el *índice de confianza* (β) del modelo de equilibrio límite [36, 44, 71, 86].

Para el caso donde las propiedades del material sean también variables estocásticas, es (β) el que se minimiza

$$\beta_{\min} = \min_{\mathsf{p},\mathsf{s}\in\mathbb{R}} \beta(\mathsf{p},\mathsf{s}); \tag{2.52}$$

donde p es el arreglo de variables que definen las propiedades del material, y s el arreglo de variables que definen la superficie de ruptura.

En un análisis determinista para las propiedades del material es mejor minimizar la diferencia de las fuerzas equilibrantes con las fuerzas desequilibrantes

$$g_{\min}(\mathsf{s}) = \min_{\mathsf{s}\in\mathbb{R}} g(\mathsf{s}); \tag{2.53}$$

siendo la función idónea a minimizar (*i.e. the fitness function*)

$$g(\mathsf{s}) = \sum \text{fuerzas equilibrantes} - \sum \text{fuerzas desequilibrantes}. \tag{2.54}$$

Otra forma para el análisis determinista es el de minimizar el concepto de factor de seguridad f_s.

$$f_{s,min} = \min_{\mathsf{s}\in\mathbb{R}} f(\mathsf{s}). \tag{2.55}$$

Si la superficie de ruptura es circular definida por el centro de la circunferencia (x_c, y_c) y su radio r, entonces la minimización sería en términos de estas variables

$$f_{s,min} = \min_{\substack{(x_c,y_c)\in\mathbb{R}^2 \\ r\in\mathbb{R}^1}} f_s(x_c, y_c, r). \tag{2.56}$$

Sin embargo, eso implica que se tenga que imponer funciones de restricción lineales y polinomiales; que pueden hacer el procedimiento mucho más complejo que los otros y susceptible a que no exista una convergencia.

Lista de ejercicios

2.1. Desarrolle las expresiones de las ecuaciones de equilibrio límite para un talud infinito de falla plana para los siguientes casos:

- talud saturado indrenado;
- caso general;
- caso general con influencia de la vegetación y árboles.

2.2. Halle la expresión general para el factor de seguridad de un talud infinito de falla plana, donde se tome en cuenta la aplicación de una carga externa concentrada e inclinada en un ángulo α con la vertical —pero hacia la pata del talud (Figura 2.12).

Recomendación: distribuya la fuerza concentrada a lo largo de $l = a \sec \beta$ y analice en el punto medio de la dovela sobre la superficie de deslizamiento.

Nota: para que se cumpla y exista equilibrio en la dovela, las dovelas adyacentes tienen que tener la misma condición de fuerzas externas aplicadas.

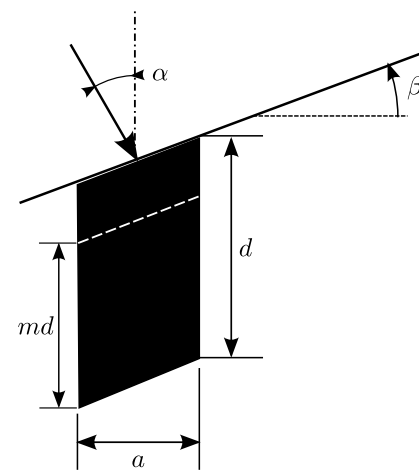


Figura 2.12 Perfil de la sección transversal del embalse, sitio de análisis.

2.3. El perfil típico de un talud tiene una inclinación de 45 °. El macizo está compuesto por unas intercalaciones de areniscas limo arcillosas (ALA) y lutitas; sin embargo, en esa sección en especial de este análisis son las ALA las que están aflorando en la superficie. Los planos de estratificación de las ALA son paralelos a la superficie del terreno, y el ángulo de fricción interna drenada efectiva entre las estratificaciones se halló que es igual a 32 ° y la

cohesión drenada efectiva igual a 0.02 MPa; mientras que los mismos parámetros en estado no-drenado iguales a 0 ° y 0.3 MPa, respectivamente. El peso unitario húmedo ($\gamma_{0.08}$) para un contenido de humedad de $w = 0.08$ (*i.e.* 8 %) de este mismo material es igual a 18.6 kN m^{-3}, la gravedad específica igual a 2.6 .

Acontece que en la época de máximas precipitaciones el nivel de aguas máximas (NAmax) se mantiene en el nivel que se muestra en la Figura 2.13; luego, en época de sequía el nivel de aguas alcanza el nivel de aguas mínimas (NAmin).

Encuentre el factor de seguridad contra la estabilidad en la condición para (NAmax, luego para la condición (NAmin a pocos días que éste desciende (*i.e.* análisis no–drenado) y a varios días después (*i.e.* análisis drenado). Debido a que existe la presencia de plantas y árboles tome en cuenta que el incremento de las raíces a la cohesión es constante en todas las épocas y de 250 kPa; y el peso de los árboles por metro lineal es de 12 kN m^{-2}.

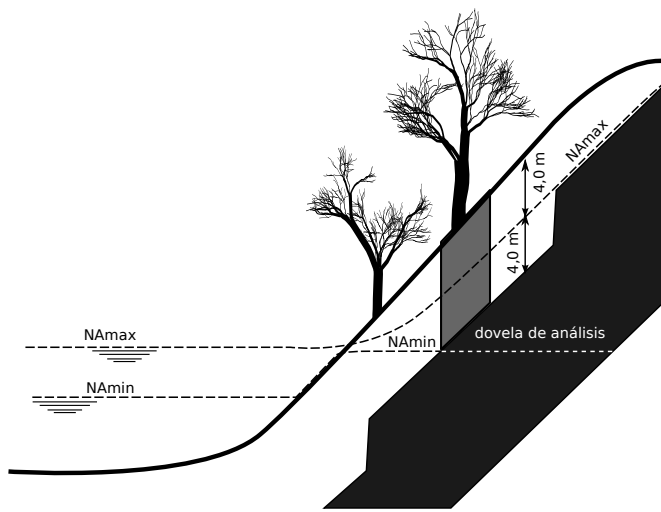


Figura 2.13 Perfil de la sección transversal del talud, sitio de análisis.

2.4. En un punto específico de una vía, se decidió analizar un talud con una superficie de falla circular, como se muestra en la Figura 2.14.

Calcule el factor de seguridad por el método de Bishop simplificado solo para un factor de seguridad semilla. El factor de seguridad semilla se escoge de forma *aleatoria* entre el intervalo $[0.21, 1.89]$.

Se encontró por medio de ensayos de laboratorio que el ángulo de fricción interna saturado en condiciones drenadas del suelo (ϕ') es de 21 °; la cohesión saturada drenada del

mismo suelo (c') igual a 4.5 kN m^{-2}; el peso unitario seco (γ_d) igual a 13 kN m^{-3}; y la gravedad específica (G_s) de 2.4.

Se extrajo muestras inalteradas en la porción del suelo por encima del nivel freático, donde se vió que ellas tenían un contenido de humedad (w) de 0.18.

La posición del nivel freático es horizontal detrás del talud a una cota de 15.5 m y todos coincidentes con el nivel del terreno a partir del punto donde el nivel freático corte con la superficie la cara del talud. Use el peso unitario saturado en los cálculos para el cálculo del peso para aquellas porciones de suelo que estén por encima del nivel freático (*i.e.* $\gamma^* = \gamma_{sat}$). Divida la superficie de falla en 10 dovelas de ancho constante.

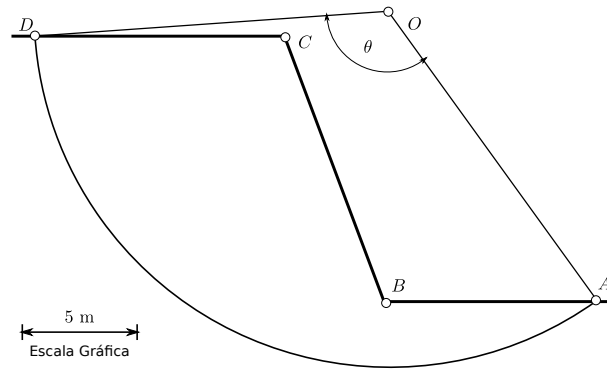


Figura 2.14 Talud y círculo de falla a resolverse por el método de Bishop simplificado para el Problema 2.4.

2.5. Para el talud que se muestra en la Figura 2.15, determine el factor de seguridad en términos de esfuerzos no-drenados. Los pesos unitarios saturados (γ_{sat}) de los dos suelos son iguales a 19 kN m^{-3}. Para el suelo 1, la resistencia al corte no drenada (c_u) es de 20 kN m^{-2} y el ángulo de fricción interna no drenado (ϕ_u) de 0 °; mientras que para el suelo 2, las mismas variables son respectivamente 35 kN m^{-2} y también 0 °. Tome en cuenta que la superficie de agua a presión nula coincide con la superficie del terreno en todo el talud, pero el análisis es a esfuerzos totales no-drenados. *Nota:* el presente problema no requiere de métodos numéricos ni uso de ningún programa, este se puede resolver de forma analítica haciendo equilibrio de momentos usando el concepto de factor de seguridad global relativo a el concepto de *momento de una fuerza*.

2.6. En un apique practicado en un talud se observó que el 80 % de la capa de suelo es un suelo con $c' = 20$ kN m^{-2} y $\phi' = 36°$, y el restante 20 % por debajo de éste es un suelo con valores $c' = 120$ kN m^{-2} y $\phi' = 22°$. En esta última capa se encontró que adicionalmente las raíces de la vegetación y los árboles incrementan la resistencia del suelo en forma de cohesión en un valor de $c_r = 1.6$ kN m^{-2}, pero que sólo el peso de los árboles aumenta un esfuerzo vertical puntual que en forma general se puede distribuir en una carga superficial de $q_v = 1.2$ kN m^{-2}.

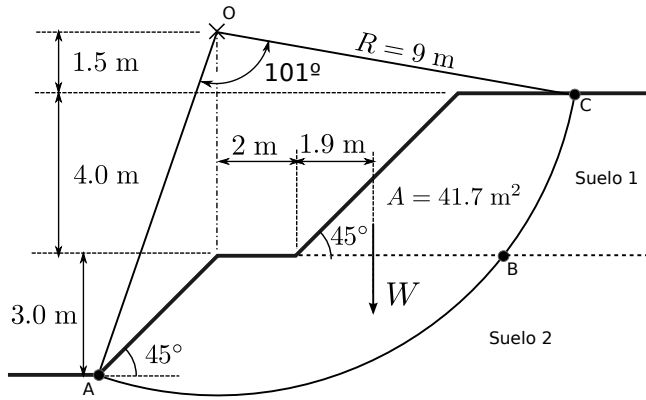


Figura 2.15 Talud y círculo de falla a resolverse.

Calcule el factor de seguridad contra el deslizamiento para la situación así encontrada, asumiendo una falla plana en un talud infinito. El espesor de la capa de suelo —que es paralela a la superficie del terreno— es de 6 m, el nivel freático coincide con la superficie del terreno y el flujo también es paralelo a éste; y el ángulo del talud es de 45 °. El peso unitario saturado de los dos suelos es de 22 kN m^{-3}. La falla se produce a una profundidad de 5 m (*i.e.* distancia vertical desde la superficie).

2.7. Una presa tiene un talud con una superficie de falla circular potencial como se muestra en la Figura 2.16. Calcule el factor de seguridad por el método de las dovelas en estado drenado. Para toda la presa el valor de r_u es de 0.45 y el peso unitario del suelo en estado saturado es de 20 kN m^{-3}. El ángulo de fricción interna saturado en condiciones drenadas del suelo (ϕ') es de 32 ° y la cohesión saturada drenada del mismo suelo (c') igual a 16 kN m^{-2}. Divida la superficie de falla en 4 dovelas de ancho constante. Recuerde que:

$$r_u = \frac{u}{\sigma_v}.$$

2.8. Determine el factor de seguridad global f_s de un talud que falla de forma plana y paralela a la superficie del terreno, donde se tome en cuenta la carga horizontal de un evento sísmico con factor $k_h = 0.4$. El talud no está influenciado por ningún tipo de vegetación, pero tiene agua que fluye de forma paralela a la superficie del terreno y su nivel freático está a 1 m debajo de la superficie. La superficie del terreno tiene un ángulo de inclinación con la horizontal de $\beta = 68°$. La falla se desarrolla en la interfase de un suelo y roca a una profundidad de 5 m. En la interfase se tiene que el ángulo de fricción saturado efectivo es de $\phi' = 33°$ y la cohesión saturada efectiva de $c' = 60$ kPa; donde el suelo que está por encima de la roca tiene un peso unitario saturado de $\gamma_{sat} = 22$ kN m^{-3} y además que el

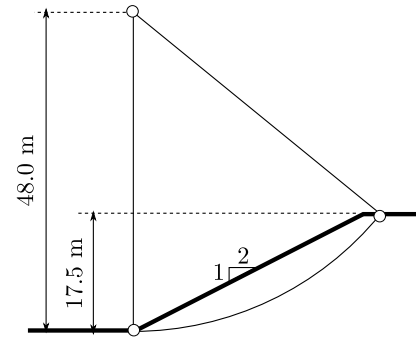


Figura 2.16 Talud y círculo de falla a resolverse por el método de las dovelas para el Problema 2.7.

peso unitario por encima del nivel freático es de $\gamma^* = 20\,\mathrm{kN\ m^{-3}}$. Use el criterio de ruptura Mohr-Coulomb.

Recuerde que los esfuerzos perpendicular y paralelo que se generan sobre la superficie de falla por la acción sísmica son de forma respectiva

$$\sigma_{\perp \mathrm{s}} = -k_{\mathrm{h}} \left[m\gamma_{\mathrm{sat}} + (1-m)\gamma^* \right] d \sin\beta \cos\beta; \tag{2.57a}$$

$$\sigma_{\parallel \mathrm{s}} = k_{\mathrm{h}} \left[m\gamma_{\mathrm{sat}} + (1-m)\gamma^* \right] d \cos^2\beta. \tag{2.57b}$$

2.9. Encuentre la cohesión que tiene que incrementarse o rebajarse al suelo para que un talud de 55 °de inclinación tenga un factor de seguridad global de $f_{\mathrm{s}} = 1.3$. El suelo que está en la base del posible plano de deslizamiento tiene parámetros drenados $c = 2\,\mathrm{kN\ m^{-2}}$ y $\phi = 23\,^\circ$. La gravedad específica del mismo suelo (G_{s}) es de 2.5; y se hizo un ensayo en muestra inalterada a un contenido de humedad de $w = 0.21$, donde se encontró que su peso unitario a esa humedad es de $\gamma_{0.21} = 17\,\mathrm{kN\ m^{-3}}$. Se asumirá el caso extremo que la superficie de agua llegará a la superficie del terreno, pero con un flujo paralelo a la misma superficie. El plano de movimiento del posible deslizamiento está a una profundidad vertical de 3.2 m. No hay ni vegetación ni árboles en el talud.

2.10. ¿Cuál es el coeficiente sísmico k_{h} que hará al talud de una ladera cualquiera volverle inestable? Es decir, que su factor de seguridad sea igual a la unidad. El talud tiene una inclinación $V : H$ de 2.4 : 1, la profundidad de la superficie de falla desde la superficie del terreno es de $d = 2.9\,\mathrm{m}$. El suelo tiene parámetros de resistencia drenada de $c' = 15\,\mathrm{kN\ m^{-2}}$ y $\phi' = 23°$; y el peso unitario saturado es de $\gamma_{\mathrm{sat}} = 20\,\mathrm{kN\ m^{-3}}$. No hay ni vegetación ni árboles en el talud. Existe flujo paralelo a la superficie del terreno a una profundidad de 1 m. Asuma peso unitario por encima del nivel freático igual al saturado. Si obtiene valores negativos de k_{h} indique a qué causa se debe.

Solución 2.8. Si tomamos en cuenta los esfuerzos paralelos y normales a la superficie de falla a causa de un evento sísmico expresado bajo carga pseudoestática, tenemos la siguien-

te expresión para el factor de seguridad

$$f_s = \frac{\left[t\left(\cos^2\beta - k_h \sin\beta\cos\beta\right) - \gamma_w m\cos^2\beta\right] d\tan\phi + c}{td\left(\sin\beta\cos\beta + k_h\cos^2\beta\right)};$$

donde

$$t = m\gamma_{sat} + (1-m)\gamma^*.$$

En la anterior expresión no podemos despejar k_h; por tanto, resolvemos por procedimientos iterativos. El código en MATLAB® que resuelve el problema se muestra en el siguiente listado.

```
%% %Input data.% %
betaAng =atan(2.4);
d =2.9;
c =15;
phiAng =23*pi/180;
gammaSat =20;
gammaW =9.81;
gammaAste =gammaSat;
m =(2.9-1)/2.9;
fs =1.00;
t =m*gammaSat +(1-m)*gammaAste;
khSeed =0.3;

%% %Iterative solution.% %
khSearch =fsolve( ...
    @(kh) fs *t *d *( sin(betaAng)*cos(betaAng) +kh *(cos(betaAng))^2 ) -c
    ...
    -d *tan(phiAng) *( t*( (cos(betaAng))^2 -kh *sin(betaAng)*cos(betaAng)
    ) ...
    -gammaW *(cos(betaAng))^2 *m ), khSeed );

%% %Displaying the solution.% %
display( sprintf('The value of kh that produces a failure is %5.2f.',
    khSearch) );
```

El valor de k_h que produce un factor de seguridad de $f_s = 1$ es -0.18; esto indica que el talud es inestable inclusive en condiciones estáticas, sin la presencia de carga sísmica.

Veamos porqué. El coeficiente sísmico se evalúa siempre en las condiciones desvafo-rables; es decir, que éste (multiplicado por la masa del talud) tiene que dar una fuerza desestabilizante. La mejor condición con carga sísmica sería que el talud tenga un $k_h = 0$; y una condición más desfavorable a este es que cualquier $k_h > 0$. Por tanto, un valor de $k_h < 0$ es favorable y estabilizante. Si para tener $f_s = 1$ se necesita tener una fuerza estabilizante, quiere decir que el talud aún en condiciones estáticas es inestable.

Para verificar esto, calculamos el factor de seguridad sin tomar en cuenta k_h con la ecuación

$$f_s = \frac{(t - \gamma_w m)\, d \cos^2\beta \tan\phi + c}{t d \sin\beta \cos\beta};$$

y el siguiente listado

```
%% %Direct solution.% %
fs =( (t -gammaW *m) *d *(cos(betaAng))^2 *tan(phiAng) +c ) ...
    ./( t *d *sin(betaAng) *cos(betaAng) );
%Displaying the solution.%
display( sprintf('The value of fs without kh is %5.2f.', fs) );
```

donde se obtiene que el factor de seguridad es de 0.85, lo cual muestra lo explicado arriba.

Ambas situaciones se puede ver si se hace una gráfica de valores de k_h en abscisas y f_s en ordenadas para valores de $k_h = [-1, 1]$, tal como se muestran en la Figura 2.17; figura que se obtuvo con el siguiente listado

```
%% Verication.% %
kh =-1: 0.2: 1;
fs =( (t *((cos(betaAng))^2 -kh *sin(betaAng)*cos(betaAng)) ...
    -gammaW *(cos(betaAng))^2 *m) *d* tan(phiAng) +c ) ...
    ./( t *d *(sin(betaAng) *cos(betaAng) +kh *(cos(betaAng))^2) );

plot( kh, fs, 'ok-' );
xlabel( 'k_h' ); ylabel('f_s');
set( gca, 'TickDir', 'Out' );
```

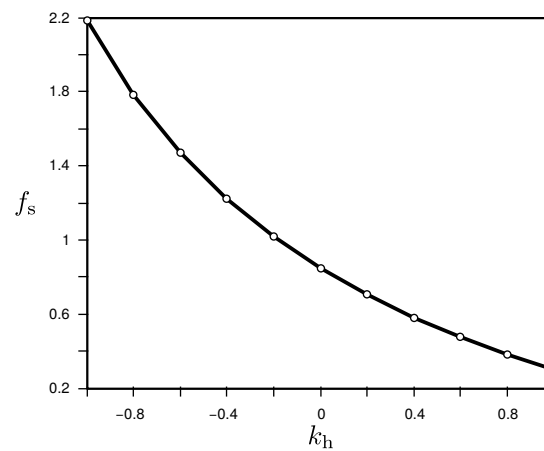


Figura 2.17 Gráfica de la variación de f_s con k_h para el problema planteado en el Problema 2.10.

Capítulo 3
Análisis de estabilidad en macizos rocosos

Un macizo rocoso puede mostrar uno o más modos de ruptura dependiendo de los siguientes factores:

- presencia o ausencia de familias de discontinuidades;
- orientación de las familias de discontinuidades con relación con la cara natural o excavada;
- espaciamiento de las discontinuidades en una o en las tres dimensiones;
- la resistencia mecánica entre las paredes de la discontinuidad;
- persistencia de las discontinuidades.

Los modos de ruptura por la presencia de las discontinuidades en un macizo rocoso pueden ser: de ruptura plana, de cuña, y de volteo inverso (*i.e. toppling*) por flexión y por generación de rocas paralelepípedas; todas estas que dependen de las orientaciones espaciales de las discontinuidades, la orientación de la cara expuesta de corte (o cara expuesta natural) y de la resistencia de las paredes de contacto de las discontinuidades. En el Cuadro 3.1 se resume estos modos (mecanismos) de ruptura comunes que se presenta en los macizos rocosos.

3.1. Ruptura plana

En el contexto de este capítulo, la ruptura de deslizamiento de tipo *plana* se refiere al desplazamiento, una relativa a la otra, de dos superficies planas generado por acciones de una inestabilidad de un talud (Figura 3.1).

Es importante tener en cuenta que no es correcto decir *ruptura planar*. Esta última es una transliteración del idioma inglés adoptado por algunos ingenieros del término *planar failure*. La palabra *plana* es un adjetivo del sustantivo *ruptura*; mientras que *planar* no tiene significado correcto en el castellano.

Cuadro 3.1 Modos de ruptura en macizos rocosos con discontinuidades [72].

Modo	Descripción	Comentarios
Plana	Ocurre cuando una discontinuidad buza en una dirección cercana a aquella de la cara del talud y la magnitud del buzamiento es mayor al del ángulo de fricción de la discontinuidad.	Es un caso simple, donde para que ocurra la ruptura del plano en los taludes tiene que existir superficies laterales que la liberen, que le permita deslizarse hacia afuera de la cara del talud.
De Cuña	Ocurre cuando la orientación de dos discontinuidades resultan en una línea que buza en una dirección cercana a la de la cara del talud, y que el buzamiento de esta línea es significativamente mayor que el ángulo de fricción de las dos paredes de las discontinuidades.	Este tipo de ruptura es peligrosa porque carece de planos de discontinuidades que puedan detenerla como en el caso anterior.
Esférica (Circular)	Cuando el material es débil o cuando el macizo rocoso está altamente fracturado por una serie de planos de discontinuidad orientados de forma aleatoria, se puede asemejar la ruptura a una superficie esférica.	Cuando el patrón de discontinuidades es aleatorio y no existen familias de discontinuidades definidas. El tratamiento de este tipo se puede abordar por los métodos de equilibrio límite (vea Capítulo 2).
Volteo simple	Ocurre cuando la roca es esbelta (de forma tabular) cuando sus discontinuidades buzan hacia adentro de la cara del talud con ángulos casi verticales y cuando las placas de roca reposan sobre una discontinuidad basal que buza hacia afuera de la cara del talud con un ángulo menor al ángulo de fricción interna de esa discontinuidad.	Por lo general requiere de tres familias de discontinuidades, dos orientadas de tal modo que su línea de intersección buza hacia adentro del talud y la otra buza en una semejante dirección que la cara del talud a un ángulo bajo.
Volteo flexión	Ocurre cuando existe una familia de discontinuidades espaciadas de forma estrecha y que buza con un ángulo fuerte en contra de la cara del talud.	Por lo general resultan movimientos graduales detrás de la cara del talud a distancias de hasta cinco veces la altura del talud.
Caídas	Ocurre cuando rocas de diferentes tamaños y formas caen libremente cuando se desprenden de un talud casi vertical. El movimiento de la roca incluye rebote, rotación, deslizamiento y fragmentación. El desprendimiento de fragmentos pequeños de roca desde la cara del talud se conoce con el nombre de *ravelling*	Este problema se predice con trayectorias de caídas de aquellas rocas inestables, que permite el diseño de obras de protección.

Figura 3.1 Ruptura plana por un plano de persistencia total de una andesita, vía estatal 6003 KM 38+790 de La Mansa a Amagá, Antioquia Colombia.

3.1.1. Método cinemático

La cinemática, desde el punto de vista de la mecánica de rocas, es una rama que estudia el movimiento de los bloques de roca formado por discontinuidades totalmente persistentes, sin tomar en cuenta las fuerzas que a éste se le puedan aplicar y el peso del mismo. Por tanto, se refiere al estudio particular de las rocas que tienen la libertad de moverse influenciadas sólo por su geometría y sus puntos de apoyo. Si estas condiciones hacen que cualquier roca pueda moverse, entonces se considera como *roca potencial a tener cinemática*.

En este método de análisis, se ignora la presencia de agua en las discontinuidades y las fuerzas externas: estáticas o dinámicas.

Para aplicar este método es necesario tener como herramientas: las proyecciones estereográficas ecuatorial y polar impresas en papel, una o más láminas trasparentes.

La proyección estereográfica ecuatorial sirve para dibujar las trazas del plano en la esfera; la proyección estereográfica polar para ubicar los polos de aquellos planos. Con las áreas de concentración de polos se identifica aquellas familias que son las más recurrentes en el macizo rocoso, con las cuales se realiza los primeros análisis de estabilidad.

En la ruptura plana, el movimiento de la roca ocurre por el deslizamiento a lo largo de un plano. Para que ocurra este movimiento, se debe satisfacer las siguientes tres condiciones:

- la dirección de buzamiento del plano —por el cual la fracción de roca tiende a deslizarse— tiene que estar en aproximadamente 20 °alrededor de la dirección de buzamiento de la cara del corte o la cara del talud;
- el plano de deslizamiento que es un plano de discontinuidad tiene que estar presente en el talud en su totalidad;
- el buzamiento del plano de deslizamiento debe exceder el ángulo de fricción interna de la interacción de ambos planos.

En este análisis, se ignora aquellos factores tales como la presencia del agua, la presión en los intersticios y en los planos de discontinuidad, y el aporte a la resistencia de las otras caras de la roca.

El procedimiento para construir el contorno que enmarca la presencia de una ruptura en el diagrama estereográfico es el siguiente (3.2):

- marque con una línea la orientación de la normal del plano del talud, y con una flecha la orientación del mismo;
- ubique el polo del plano del talud;
- desde el centro del diagrama en la línea que une con el polo del talud trace otra línea, y a ± 20 °a cada lado de esta línea trace dos líneas más que definirán los límites de un sector de una circunferencia;
- estime el ángulo de fricción interna de la superficie del plano de ruptura, y desde el centro de la red esterográfica ubique este valor y trace un arco de circunferencia;
- de forma semejante ubique el ángulo de inclinación del talud.

Con aquellos trazos se tendrá un perímetro cerrado, que delimita si el talud es susceptible a tener ruptura plana. Cualquier polo de una discontinuidad que esté dentro de aquel perímetro es propenso a que su plano sufra una ruptura tipo plana.

Ejercicio 3.1. Evalúe por el método cinemático la posibilidad de que exista ruptura plana para un talud con orientación de 200 °e inclinación de 65 °, el cual posee una serie de familias de discontinuidades con los siguientes ángulos de dirección de buzamiento y buzamiento: 180\30, 210\40, 320\10, 070\20 y 110\80. Todas las discontinuidades tienen un ángulo de fricción interna de 20 °.

Solución 3.1. Primero hallamos la orientación de los polos correspondientes a los planos de las familias de discontinuidades en el talud. La siguiente tabla muestra tales resultados. Estos polos lo dibujamos en la proyección estereográfica con ayuda de la red polar equiárea.

Luego creamos el contorno a partir de los datos de la orientación del talud y el ángulo de fricción interna. Procedemos de la siguiente manera:

- ubicamos el punto correspondiente al ángulo de fricción interna desde el centro de la red hacia afuera;

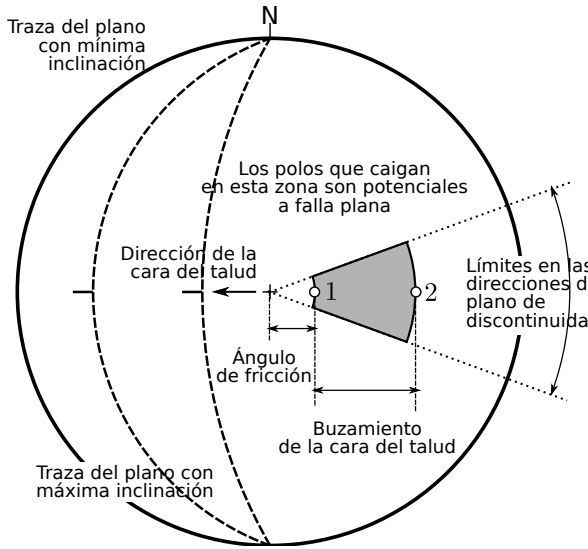


Figura 3.2 Construcción del contorno de existencia de una ruptura plana.

- sobre la proyección ubicamos también el polo correspondiente al plano del talud (*i.e.* 200\65);
- tomando como eje de simetría la línea que se forma entre el centro de la red y el anterior polo, trazamos dos radios a 20 ° arriba y abajo de ésta;
- tomando como radio un valor angular igual al ángulo de fricción interna, trazamos el límite inferior de la región;
- tomando como radio un valor angular igual a la inclinación del talud, trazamos el límite superior de la región.

Con las orientaciones de los planos de discontinuidad obtenemos las orientaciones de los polos, tal como se muestra en la siguiente tabla. Estos polos lo ubicamos también en el diagrama estereográfico.

Plano	Dirección de buzamiento en °	Buzamiento en °	Azimut polo en °	Cabeceo polo en °
1	180	30	000	60
2	210	40	030	50
3	320	10	140	80
4	070	20	250	70
5	110	80	290	10

Encontrada la región de análisis, deducimos que las familias de discontinuidades 1 y 2 son las que pueden presentar una ruptura plana para la orientación del talud, tal como se muestra en la siguiente figura.

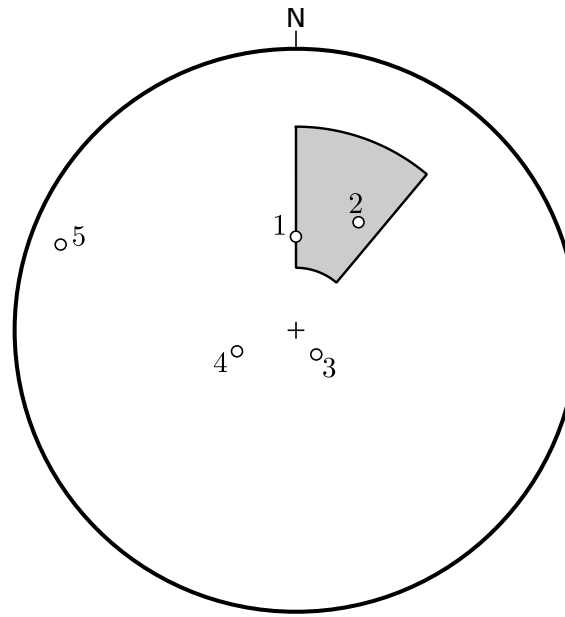


Figura 3.3 Los polos de las discontinuidades 1 y 2 caen en la zona; por tanto, se produce ruptura plana (Ejercicio 3.1).

□

Ejercicio 3.2. Determine el ángulo de inclinación óptima para un talud que tiene una dirección de buzamiento de 360 ° en un macizo rocoso que tiene las siguientes orientaciones: 070\10; 020\70; 170\25; 350\80; 280\80. El ángulo de fricción interna entre las superficies de las discontinuidades es de 30 °.
Solución 3.2. □

3.1.2. Método de equilibrio límite, modelo bidimensional

La ruptura plana en un macizo rocoso con una sola familia de discontinuidades totalmente persistente y con dirección de buzamiento paralelo a la dirección del talud se puede resolver por medio de los métodos de equilibrio límite, vistos ya en el análisis de estabilidad de taludes de suelo.

También se parte de la misma definición de factor de seguridad global, aquella que separa la suma de fuerzas que resisten (F_{ri}) ó que movilizan (F_{ri}) el deslizamiento,

$$f_s = \frac{\sum F_{ri}}{\sum F_{mi}}, \tag{3.1}$$

donde uno puede escoger entre varios criterios de ruptura conocidos y desarrollados para superficies rocosas.

Las fuerzas mínimas que intervienen en el análisis son: la resultante del peso propio trasladada a la superficie de deslizamiento; y la resultante de la resistencia a corte en la superficie de deslizamiento τL.

A parte de estas fuerzas, pueden presentarse distintas fuerzas externas como por ejemplo:

- una fundación apoyada en la superficie;
- un anclaje que ayuda a la estabilidad;
- fuerza resultante de empuje hidráulico en la superficie de la discontinuidad o en una discontinuidad de tracción;
- fuerza resultante seudoestática para análisis dinámico.

En todos los casos, se tiene que verificar si la proyección vertical —desde el centro de gravedad de la masa que se desliza— cae dentro de la superficie de deslizamiento. Si no es así es necesario verificar el equilibrio de momentos referente a la base de la cuña.

Corte vertical estado seco

Este es el caso más simple, que rara vez se da, y es cuando no se tiene junta de tracción y sobre la discontinuidad no se tiene presión intersticial. El factor de seguridad global en este caso sería

Material netamente friccionante sin fisura de tracción

$$\begin{aligned} f_s &= \frac{F_r}{F_m} \\ &= \frac{\tau L}{W \operatorname{sen} \alpha}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

siendo α el buzamiento de la discontinuidad totalmente persistente.

Material netamente cohesivo sin fisura de tracción

En la Figura 3.4, la fuerza de perturbación es $0.5\gamma H^2 \sin\alpha\,(\tan\alpha)^{-1}$. La fuerza de estabilización es $s_u H\,(\sin\alpha)^{-1}$; donde s_u es la resistencia a corte indrenada.

Si se toma el ángulo crítico al deslizamiento como $\alpha_{crit} = 45°$, entonces $H_c = 4s_u\gamma^{-1}$. Sin embargo, estas predicciones serán inseguras en la práctica debido a que los suelos arcillosos reales son débiles a tracción.

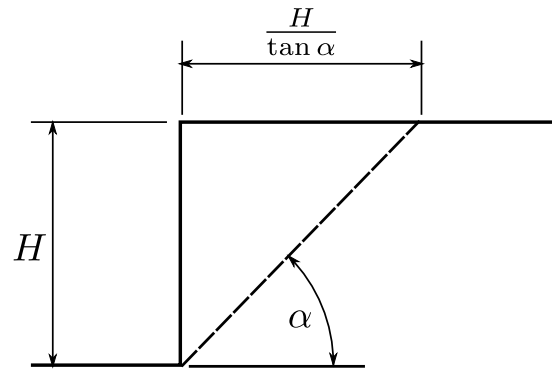


Figura 3.4 Esquema de la delimitación de una banca vertical, análisis $\phi = 0$ sin fisura de tracción.

Material netamente cohesivo con fisura de tracción

En la Figura 3.5 se muestra el caso de la ruptura plana con fisura de tracción. Aquí se asume que la profundidad de la fisura de tracción igual a $D = 0.5H_s$ según Terzaghi y un ángulo del talud de 45 °.

La fuerza desequilibrante es:

$$\gamma\frac{3}{4}H_c \times \frac{H_c}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y la fuerza equilibrante es:

$$s_u\frac{H_c}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Para la ruptura, cuando $F = 1$, la altura crítica es $H_c = \frac{8}{3}s_u\gamma^{-1}$, que es $2.67s_u\gamma^{-1}$. Esto da una predicción más realista para la altura de un corte vertical temporal en una arcilla.

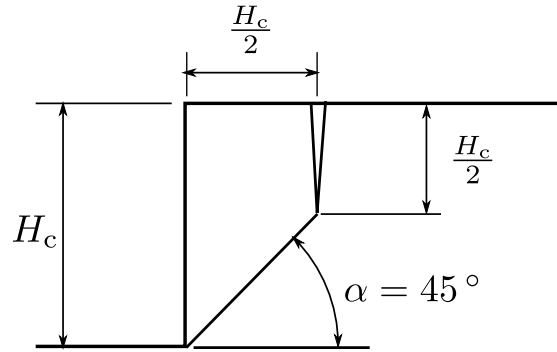


Figura 3.5 Esquema de la delimitación de una banca vertical, análisis $\phi = 0$ con fisura de tracción.

Corte inclinado con diferentes criterios de ruptura, estado seco

Debido a que el esfuerzo normal a la superficie de discontinuidad es una variable que se relaciona con la resistencia mecánica, es necesario tener una expresión del esfuerzo normal para la geometría que se está analizando, que en este caso como lo muestra la Figura 3.6 es:

$$\sigma_\perp = \frac{W \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha}{H}. \tag{3.3}$$

De similar modo, se halla el esfuerzo tangencial a la superficie de discontinuidad que es

$$\sigma_\parallel = \frac{W \operatorname{sen}^2\alpha}{H}. \tag{3.4}$$

El peso en términos de la geometría del problema resulta ser

$$W = \frac{1}{2}\gamma H^2 \left(\cot\alpha - \cot\beta\right), \tag{3.5}$$

siendo β la inclinación del talud y tiene que cumplirse que $\beta \geq \alpha$.

Reemplazando la Eq. 3.5 en las ecuaciones 3.3 y 3.4 se tiene que

$$\sigma_\perp = \frac{\gamma H}{2}\left(\cos\alpha - \cot\beta \sin\alpha\right)\cos\alpha, \tag{3.6a}$$

$$\sigma_\parallel = \frac{\gamma H}{2}\left(\cos\alpha - \cot\beta \sin\alpha\right)\sin\alpha. \tag{3.6b}$$

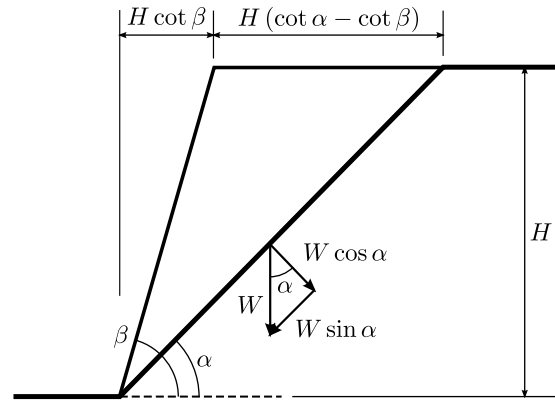


Figura 3.6 Esquema de la delimitación de un corte inclinado en un macizo rocoso con una familia de discontinuidades.

Criterio de ruptura Navier

Si se usa el criterio de Navier, el factor de seguridad es

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{s}} &= \frac{\frac{W}{H}\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\tan\phi H}{W\,\mathrm{sen}^2\,\alpha} \\ &= \cot\alpha\tan\phi. \end{aligned} \tag{3.7}$$

El ángulo crítico de la discontinuidad α_{cr} (*i.e.* el ángulo de la discontinuidad para que se tenga un factor de seguridad igual a la unidad) es independiente del peso e igual a ϕ:

$$f_{\mathrm{s}} \to 1 : \alpha = \phi$$

$$\alpha_{\mathrm{cr}} \to \alpha.$$

Criterio de ruptura Mohr-Coulomb

El factor de seguridad para este caso según el criterio de Mohr-Coulomb es

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{s}} &= \frac{cH + W\cos\alpha\sin\alpha\tan\phi}{W\,\mathrm{sen}^2\,\alpha} \\ &= \frac{\frac{2c}{\gamma H} + (\cos\alpha - \cot\beta\sin\alpha)\cos\alpha\tan\phi}{(\cos\alpha - \cot\beta\sin\alpha)\sin\alpha}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

El ángulo crítico de la discontinuidad (α_{cr}) se obtiene de resolver la ecuación trigonométrica no-lineal

$$(\tan\phi)\cos^2\alpha_{\text{cr}} - (\cot\beta\tan\phi + 1)\,\text{sen}\,\alpha_{\text{cr}}\cos\alpha_{\text{cr}} + (\cot\beta)\,\text{sen}^2\,\alpha_{\text{cr}} + \frac{2c}{\gamma H} = 0; \qquad (3.9)$$

sin embargo, para muchos casos la solución numérica de esta ecuación obtiene una solución fuera del rango de $0° \leq \alpha \leq 90°$ cuando el valor de c es sobre-estimado.

El rango de validez de α_{cr} es $[\phi, \beta[$. Entre este rango existe un ángulo α_{crs} que divide en dos intervalos:

$$\text{de límite inferior, } [\alpha_{\text{cr}lb,max} = \phi, \alpha_{\text{cr}lb,max} = \alpha_{\text{crs}}[;$$

$$\text{de límite superior, } [\alpha_{\text{cr}ub,min} = \alpha_{\text{crs}}, \alpha_{\text{cr}ub,max} = \beta[.$$

En un talud como el que se analiza —manteniendo todos los parámetros constantes— existiría un valor de cohesión c_{crs} que dará α_{crs}. Si se garantiza que la cohesión entre las paredes de la discontinuidad no bajará hasta c_{crs}, el ángulo crítico no existe, y en caso de solicitarse un posible valor se da el correspondiente a α_{crs}. Si la cohesión baja a menos de c_{crs}, el ángulo crítico puede estar entre $[\phi, \alpha_{\text{crs}}[$ que por conveniencia se especifica que es igual a ϕ.

El valor de α_{crs} se obtiene de resolver

$$(\cot\beta - \tan\phi)\sin 2\alpha_{\text{crs}} - (\tan\phi\cot\beta + 1)\cos 2\alpha_{\text{crs}} = 0; \qquad (3.10)$$

El valor de c_{crs} se obtiene de sustituir el recién encontrado valor de α_{crs} en α_{cr} dentro de la ecuación 3.9 y de despejar c como representativo de c_{crs}.

Entre todo este análisis, se observó para taludes con ruptura plana en macizos rocosos —dentro de las escalas mesoscópicas de la ingeniería— que c_{crs} es muy bajo (*i.e.* < 1 MPa). Con esto se deduce que un deslizamiento de este tipo se debe casi en su totalidad a una disminución de la fricción entre las paredes de la discontinuidad y no a la pérdida de alguna cohesión (esto si no se proporciona de alguna fuerza desestabilizante al sistema).

Ejercicio 3.3. Aceptando que la ruptura de corte de una discontinuidad se gobierna por el criterio de Mohr-Coulomb, hallar el buzamiento crítico de la discontinuidad que pueda generar ruptura plana en un talud de inclinación de 85 ° y altura de 20 m. El macizo rocoso tiene un peso unitario de $0.019\,\text{MN m}^{-3}$ y los resultados de corte directo sobre la discontinuidad dieron valores del ángulo de fricción de 30 ° y cohesión de 0.85 MPa.

Solución 3.3. Se hace variar el posible ángulo de buzamiento crítico en el intervalo dado entre el ángulo de fricción de la discontinuidad y la inclinación del talud, en la expresión 3.9 despejando el valor del *factor por cohesión* ($A = \frac{2c}{\gamma H}$). Para esto se ignora el valor dado como dato de c.

Se hace una gráfica con α_{cr} como variable independiente y con A como variable dependiente, tal como se muestra en la Figura 3.7.

Se muestra en la gráfica que existe un ángulo crítico máximo para el valor cercano $\alpha_{\text{cr}} \approx 57°$ y $A = 0.25$.

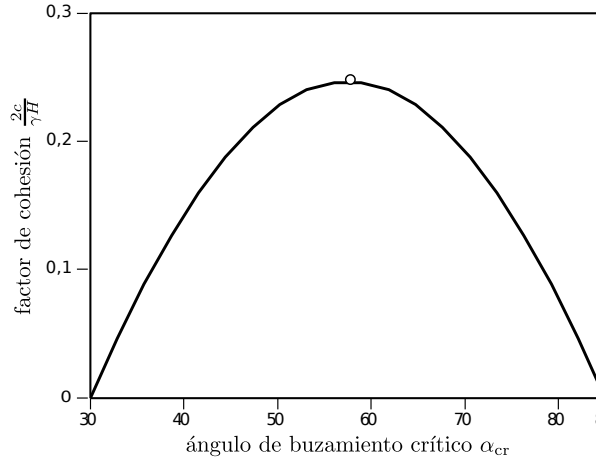


Figura 3.7 Variación del factor de cohesión para distintos valores del ángulo de buzamiento crítico.

Para obtener los valores exactos del punto máximo se resuelve la ecuación 3.10 donde se obtiene que $\alpha_{cr} = 57.5^\circ$ y $A = 0.247$. De A se obtiene c al despejarlo para dar un valor de exacto de 0.047 MPa.

Debido a que el valor por laboratorio de c es de 0.85 MPa y se garantiza que aquello no bajará en la vida útil del talud, entonces se puede proponer como ángulo de buzamiento crítico del sistema de $\alpha_{cr} = 57.5^\circ$. Si se quiere ser conservador entonces se desprecia cualquier aporte de la cohesión y $\alpha_{cr} = 30^\circ$. □

Efecto de la presión intersticial

En todos los casos anteriores no se tomó en cuenta el efecto de la presión intersticial en la discontinuidad. De existir esta presión, el esfuerzo normal sobre el plano de la discontinuidad se ve disminuido en u.

Para un corte de talud de inclinación cualquiera β con una discontinuidad persistente de inclinación α que parte de la pata del talud y donde $\alpha \leq \beta$, el efecto de la presión intersticial se da para las envolventes de ruptura de Navier, Mohr-Coulomb y Barton-Choubey en una disminución hacia el valor del factor de seguridad en un valor de

$$f_u = \frac{2u \tan \phi'}{\gamma H(\cos\alpha - \cot\beta \sin\alpha)\sin\alpha}. \tag{3.11}$$

La presión u es en este caso el valor promedio de las presiones presentes en toda la superficie de la discontinuidad de longitud $H \sec\alpha$.

Por ejemplo, si se tiene una distribución hidrostática desde un punto en la discontinuidad (punto que está más cercano a la cabeza del talud) ubicado a una profundidad de z_w hasta el final de la discontinuidad en la pata del talud; entonces

$$u = \frac{1}{2}\gamma_w (H - z_w).$$

De este modo, el valor de f_s tomando en cuenta la envolvente de Navier sería

$$f_s = \cot\alpha \tan\phi - f_u. \tag{3.12}$$

Lo propio para el caso de la envolvente de Mohr-Coulomb; la expresión para f_s resultaría en

$$f_s = \frac{\frac{2c}{\gamma H} + (\cos\alpha - \cot\beta \sin\alpha)\cos\alpha \tan\phi}{(\cos\alpha - \cot\beta \sin\alpha)\sin\alpha} - f_u. \tag{3.13}$$

Y lo mismo para el caso de la envolvente de Barton-Choubey, donde

$$f_s = \cot\alpha \tan\left[\phi_b + Jrc \lg\left(\frac{Jcs}{\sigma_n}\right)\right] - f_u. \tag{3.14}$$

Tenga presente que al valor de σ_n en el primer sumando de la expresión de la Ec. 3.14 no se le resta la presión intersticial; porque esta es una relación de esfuerzos totales: de la resistencia mecánica máxima de la junta y el esfuerzo normal que existe en la misma.

Ejercicio 3.4. Calcule el factor de seguridad al deslizamiento de un talud de 70 ° de inclinación y 30 m de altura que se desea cortar en un macizo rocoso que tiene una discontinuidad persistente justo en la pata del talud de rumbo de buzamiento igual a la dirección de la cara del talud pero con un buzamiento de 55 °, con ángulo de fricción básica ϕ_b igual a 25 °, coeficiente de rugosidad de $Jrc_{10} = 6$ y resistencia de las paredes de la discontinuidad de $Jcs_{10} = 72\,\mathrm{MN\,m^{-2}}$. El peso unitario del material rocoso es de $0.029\,\mathrm{MN\,m^{-3}}$.

Solución 3.4. El peso de la cuña se calcula con la ecuación 3.5, esto da un valor de W igual a 4.4 MN. Interesa la componente normal a la discontinuidad de ese peso, por tanto $W_n = W\cos\alpha$, que da un valor de 2.5 MN.

La longitud de la superficie de deslizamiento es

$$L_r = \frac{H}{\cos(90 - \alpha)} \tag{3.15}$$

$$= 36.6\,\mathrm{m}. \tag{3.16}$$

Ahora se hace la corrección por escala para los valores de Jrc y Jcs con las ecuaciones 1.39, donde se obtiene que $Jrc = 2.95$ y $Jcs = 24.88$.

Antes de reemplazar todos los valores hallados en la Eq. 1.38, se obtendrá el valor de ϕ según la Eq. 1.37 para tres escenarios. Cuando:

- tanto *Jrc* y *Jcs* sean corregidos por escala: $\phi = 25 + 2.95 \lg\left(\frac{24.88}{0.0686}\right)$;
- el coeficiente *Jrc* únicamente sea corregido por escala: $\phi = 25 + 2.95 \lg\left(\frac{72}{0.0686}\right)$;
- ninguno de los dos coeficientes *Jrc* y *Jcs* sean corregidos por escala: $\phi = 25 + 6.0 \lg\left(\frac{72}{0.0686}\right)$.

De estos tres escenarios se tiene valores de f_s de forma respectiva: 0.45, 0.47 y 0.66. La pregunta es: ¿Cuáles de estos tres valores es el más acertado? —A criterio personal, el valor de *Jcs* no debería rebajarse por escala, porque la resistencia no tiene una baja tan drástica por efecto escala; por tanto, el valor de $f_s = 0.47$ podría ser el más acertado.

El código en MATLAB® de la solución de este problema es

```
gamma =0.029;
H =30;
alpha =55*pi/180;
beta =70*pi/180;

sigmaN =1/2*gamma*H*cos(alpha)*(cos(alpha) -sin(alpha)*cot(beta));

phiB =25*pi/180;
jrc10 =6;
jcs10 =72; % in Mpa

Lr =H/cos(pi/4-alpha);
L10 =0.10;

jrc =jrc10 *(Lr/L10)^(-0.02*jrc10);
jcs =jcs10 *(Lr/L10)^(-0.03*jrc10);

jrcArray =[jrc10, jrc];
jcsArray =[jcs10, jcs];

i=2; j=2;
phi =(phiB*180/pi +jrcArray(i)*log10(jcsArray(j)/sigmaN))*pi/180;
fs =cot(alpha)*tan(phi);
display( sprintf('Safety factor fs=%5.2f, with Jrc and Jcs scaled.',fs) );

i=2; j=1;
phi =(phiB*180/pi +jrcArray(i)*log10(jcsArray(j)/sigmaN))*pi/180;
fs =cot(alpha)*tan(phi);
display( sprintf('Safety factor fs=%5.2f, with only Jrc scaled.',fs) );

i=1; j=1;
phi =(phiB*180/pi +jrcArray(i)*log10(jcsArray(j)/sigmaN))*pi/180;
fs =cot(alpha)*tan(phi);
display( sprintf('Safety factor fs=%5.2f, with Jrc and Jcs not scaled.',fs)
    );
```

□

Publicaciones más recientes a la propuesta por [3], como la de Barton [4], indican que aún se tiene que hacer la corrección de escala para ambos coeficientes *Jrc* y *Jcs* pero al valor

de ϕ se le tiene que añadir un ángulo que toma en cuenta la ondulación de la discontinuidad a gran escala (i_g) que resulta ser un ángulo de dilatancia adicional al que ya toma en cuenta $Jrc \lg\left(\frac{Jcs}{\sigma_n}\right)$. De esta forma, la expresión de la Eq. 1.37 resultaría en

$$\phi = \phi_b + Jrc \lg\left(\frac{Jcs}{\sigma_n}\right) + i_g.$$

Pero como el segundo término es tan pequeño

$$\phi \approx \phi_b + i_g,$$

que resulta en una expresión que no usa la retórica innecesaria de los coeficientes Jrc y Jcs, y se llega nuevamente al punto de tener que estimar el ángulo de dilatancia de la discontinuidad, pero esta vez a nivel macro. En todo caso, para disminuir la incertidumbre al mínimo es necesario hacer ensayos *in situ*, o usar otro criterio de ruptura más elaborado, que sí existe en la literatura científica.

3.2. Ruptura de cuña

La ruptura por cuña es una de las más comunes en la naturaleza (Figura 3.8), debido a que solo basta tener la combinación apropiada con el corte de un talud y la orientación de dos discontinuidades para que aquello se produzca. Pero al mismo tiempo, este tipo de rupturas muchas veces no se desarrollan aún cuando las condiciones de las orientaciones de los planos mencionados se dan, debido a que es necesario que la línea de intersección de los dos planos de discontinuidades esté expuesto en el plano del talud. En algunos casos, esta línea puede ser visible pero no necesariamente intersecta en el plano de corte, y se tiene la situación que el macizo rocoso en la pata del talud retiene el movimiento de la cuña.

3.2.1. Método cinemático

En este tipo de ruptura se tienen dos planos potenciales que pueden generar una cuña inestable con relación a la cara del talud. El movimiento se produce por deslizamiento a lo largo de ambos planos en la dirección de la línea que se forma entre el centro del diagrama estereográfico y la intersección de ambos planos. Para que ocurra la ruptura se tienen que cumplir dos condiciones:

- la línea de la intersección del par de planos debe cortar la traza del plano del talud;

(a) vía estatal de Garagoa a Santa María, Boyacá Colombia

(b) cerro San Miguel, Cochabamba Bolivia

Figura 3.8 Rupturas en cuña por planos de estratificación de areniscas.

- el cabeceo de la línea de intersección tienen que exceder el valor del ángulo de fricción interna de los planos.

Del mismo modo al anterior; este análisis no toma en cuenta los posibles distintos valores de ángulos de fricción interna de cada plano de discontinuidad, y las posibles presiones intersticiales a las que éstos estén sometidos; sin embargo para un análisis de primer nivel, esto es suficiente información para tener alguna idea de la estabilidad de cuñas.

El procedimiento es el siguiente (Figura 3.9):

- marque con una línea: la orientación de la normal al plano del talud; y con una flecha: la orientación del mismo;
- ubique el polo del plano del talud;
- estime el ángulo de fricción interna promedio de ambos planos de discontinuidad, y desde el centro de la red estereográfica ubique un arco circular con radio igual a $(90-\phi)^\circ$ hasta que corte ambas partes de la traza del plano del talud.

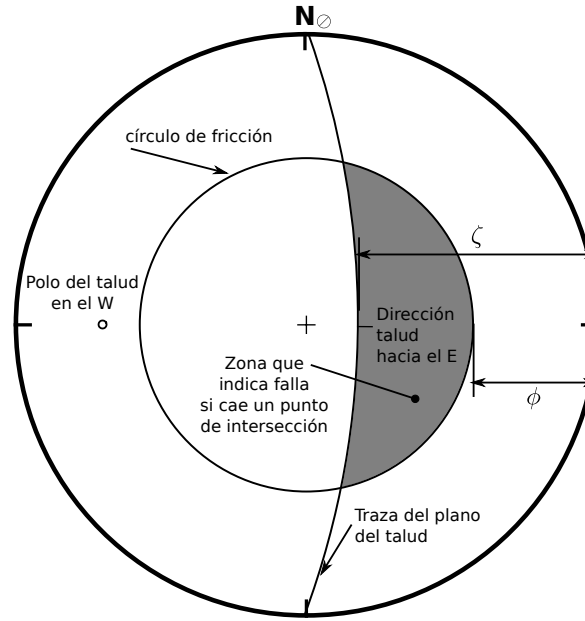


Figura 3.9 Construcción del contorno de existencia de una ruptura de cuña.

Con los trazos y arcos así definidos, se tendrá un área cerrada que delimita si el talud es susceptible a tener ruptura de cuña. Cualquier punto de intersección de un par de trazas de discontinuidades que estén dentro del aquella área son propensos a generar una ruptura tipo cuña.

Ejercicio 3.5. Identifique las cuñas potenciales a ser inestables en un talud que tiene una dirección de buzamiento de 120 °y una inclinación de 70 °en un macizo rocoso que tiene las siguientes orientaciones: 250\30; 180\20; 045\60; 235\15. El ángulo de fricción interna entre las superficies de las discontinuidades (ϕ_d) es de respectivamente 35 °, 32 °, 30 °y 25 °.

Solución 3.5. En este caso se tienen más de dos planos de discontinuidad cuyas propiedades se resumen en la siguiente tabla.

Plano	Dirección de buzamiento en °	Buzamiento en °	ϕ_d en °
1	250	30	35
2	180	20	32
3	045	60	30
4	235	15	25

Se analiza por pares de planos ($k = 2$), haciendo una combinación binomial de todos los planos ($n = 4$), donde el número de casos a analizar es igual a

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!};$$

que para este caso resulta en seis pares.

Los pares a analizar son $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$. Para cada par se obtiene el ángulo de fricción promedio de la discontinuidad ($\widehat{\phi_{\mathrm{d}}}$) y el azimut y cabeceo de la línea de intersección, tal como se muestra en la siguiente tabla. Cada uno de los puntos en el diagrama estereográfico que representan la línea de intersección se localiza en el mismo diagrama estereográfico.

Combinación	Azimut polo °	Cabeceo polo °	$\widehat{\phi_{\mathrm{d}}}$ en °
(1,2)	205	20	33.5
(1,3)	320	10	32.5
(1,4)	170	05	30
(2,3)	130	15	31
(2,4)	227	15	31
(3,4)	315	15	31

Con la orientación del talud y los valores de ϕ se construye los contornos para ver si algún polo de la línea de intersección de un par de planos cae dentro de los mismos; lo cual indicará si hay o no un potencial a crearse ruptura por cuña.

En el diagrama estereográfico de la Figura 3.10 se muestra la construcción de: las trazas y los polos de los planos (puntos blancos), intersección por pares de los planos (puntos negros), el contorno de análisis para la inclinación del talud (traza del plano del talud), las propiedades de la discontinuidad (circunferencia del ángulo de fricción) y la zona que indicará si existe o no ruptura (zona gris). Se concluye que ningún par de planos de discontinuidad es potencial a generar una ruptura por cuña porque no cae dentro de la zona gris.

□

Ejercicio 3.6. En el camino entre las localidades de Pucara a Sacambaya (Cochabmba – Bolivia) una parte de la vía tiene una dirección $N165$. En el talud de la izquierda se tiene un corte en un talud de macizo rocoso de arcillolita, cuya cara apunta a $N123$ y su inclinación con la horizontal es de 77 °. Se encontró dos planos de discontinuidades cuyas orientaciones son 247\45 y 143\60. El ángulo de fricción de estos planos de discontinuidad son de 30 °. En el talud mencionado se ha encontrado evidencias de inestabildiad por cuñas, tal como se muestra en la fotografía de la Figura 3.11. Verifique este caso de inestabilidad mediante un análisis cinemático.

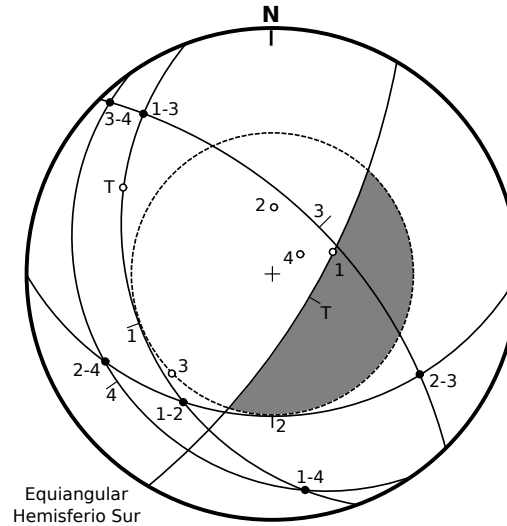


Figura 3.10 Construcción para el análisis de ruptura por cuña para las condiciones del Ejercicio 3.5.

Figura 3.11 Evidencias de la presencia de rupturas por cuña, del Ejercicio 3.6.

Solución 3.6. Haciendo el análisis cinemático del caso, se evidencia que las orientaciones de los planos de discontinuidad 247\45 y 143\60 si forman na cuña con el plano del corte del talud de orientación 123\77; sabiendo que el ángulo de fricción de los dos planos es de 30 °; tal como se muestran en la Figura 3.12.

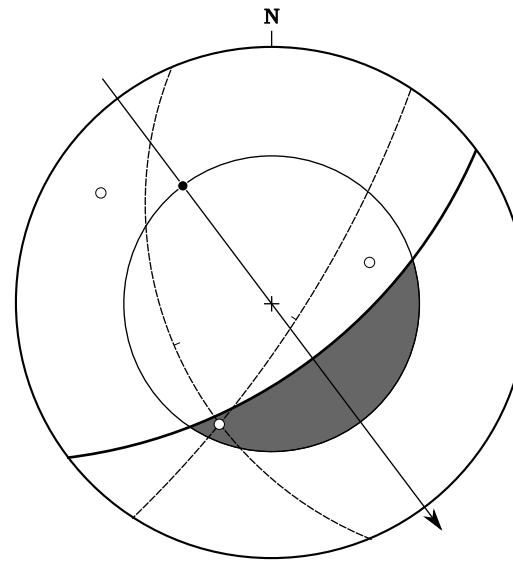


Figura 3.12 Análisis cinemático para verificar las rupturas por cuña, del Ejercicio 3.6.

□

3.3. Ruptura por volteo

3.3.1. Método cinemático

Las rupturas por volteo se producen por volteo de flexión, por volteo con formación de fracciones de roca, o la combinación de ambos fenómenos.

La ruptura de volteo por flexión involucra que las capas de roca se flexionen como una viga empotrada. Esto es común en macizos rocosos con planos paralelos, en especial con valores de espaciamientos muy bajos por el orden de los centímetros (*e.g.* lutitas, pizarras, esquistos) y donde su buzamiento es cercano a vertical. Cada capa tiende a flexionarse por su propio peso.

(a) en areniscas con intercalaciones de lutita, en la vía estatal 60 de Quibdó a La Mansa, KM 84+400, Chocó Colombia,

(b) en pórfido, en la vía estatal 6003, KM 33+300 de La Mansa a Caldas, Antioquia Colombia

Figura 3.13 Fenómeno de volteo en macizos rocosos.

La ruptura por volteo con formación de fracciones de roca —normalmente de forma cerca a un paralelepípedo— involucra la rotación de rocas formadas por una condición de flexión —como el anterior caso— que se rompen debido a la fragilidad del material.

3.3.1.1. Ruptura por volteo de flexión

Para el análisis de este tipo de ruptura se toma en cuenta el ángulo γ entre el esfuerzo normal activo en la cara del talud y la línea normal a las discontinuidades que son potenciales a tener esta ruptura, que resulta ser:

$$\gamma = \theta - (90^\circ - \beta)\,; \tag{3.17}$$

donde $(90° - \beta)$ es el cabeceo de la línea del polo del plano de discontinuidad (*i.e.* la línea normal al plano de la discontinuidad).

La condición límite ocurre cuando $(90° - \beta) \leq \theta - \phi$. La ruptura por volteo puede darse cuando la dirección de buzamiento de las discontinuidades analizadas está hasta 30 °más alejado de aquel mismo valor de la del plano del talud, y además que la diferencia entre buzamientos de ambos planos sea menor a 15 °.

El procedimiento para construir el contorno de análisis en la proyección estereográfica es (Figura 3.14):

- marque con una línea la orientación de la normal del plano del talud, y con una flecha la orientación del mismo;
- dibuje la traza del plano del talud;
- estime el ángulo de fricción interna de la discontinuidad, y ubique la distancia igual a ϕ entre el punto medio de la traza del plano del talud y el extremo de la red estereográfica;
- dibuje la traza de aquel plano que pasa por ese nuevo punto definido, que define un limite de los polos que tienen una inclinación de $\theta - \phi$;
- con el diagrama estereográfico polar, trace dos círculos menores arriba y abajo de la línea que define la dirección del plano del talud para valores de ángulos de 30 °.

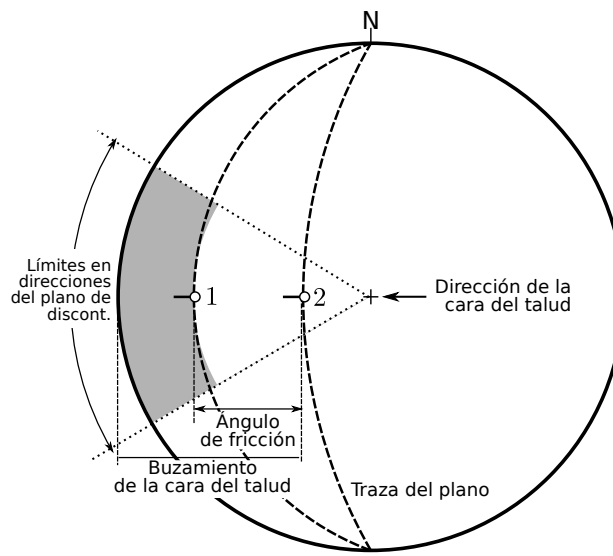


Figura 3.14 Construcción reducida del contorno de existencia de una ruptura por volteo de flexión.

Con los trazos y arcos así definidos, se tendrá un área cerrada que delimita si el talud es susceptible a tener ruptura por volteo y por flexión. Cualquier polo que caiga dentro de esa área es susceptible a generar este tipo de ruptura.

3.3.1.2. Ruptura por volteo con formación de rocas paralelepípedas

Los criterios que dictan este tipo de ruptura por volteo son:

- la dirección de buzamiento del plano basal tiene que estar alrededor de aproximadamente en 20 °la dirección de buzamiento la cara del talud;
- el buzamiento del plano basal tiene que ser menor que el ángulo de fricción interna de ese plano;
- la dirección de buzamiento de las líneas de intersección entre las discontinuidades tienen que estar en también alrededor de los 20 °la dirección de buzamiento de la cara de plano del talud, que para taludes empinados esto puede exceder los 90 °;
- el buzamiento de las líneas de intersección tienen que exceder el valor de $(90^\circ - \phi)$.

De este modo, el procedimiento de construcción de la región de análisis en la proyección estereográfica es el siguiente (Figura 3.15):

- marque con una línea la orientación de la normal del plano del talud, y con una flecha la orientación del mismo;
- dibuje la traza del plano del talud;
- del centro del diagrama y tomando como eje de simetría la línea que define la dirección del talud, trace dos líneas que se abren en 20 °arriba y abajo de ésta (estas líneas representan los límites de la dirección de buzamiento de los planos basales);
- estime el ángulo de fricción interna de la discontinuidad, y trace un arco se semicircunferencia simétrico con la línea que define la dirección del talud.

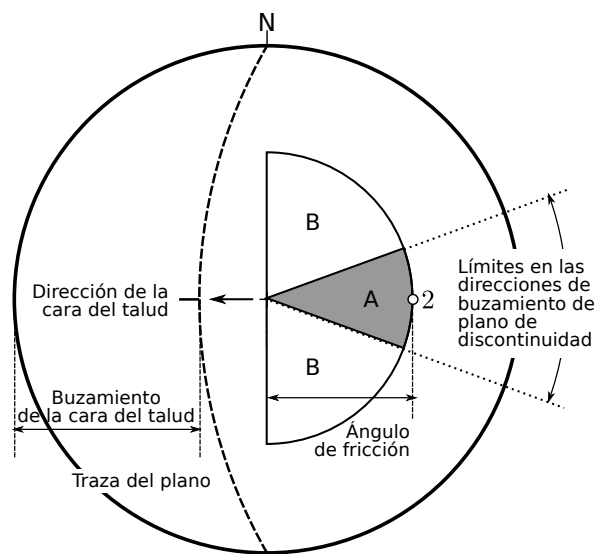


Figura 3.15 Construcción del contorno de existencia de una ruptura con formación de rocas paralelepípedas. Las intersecciones que caigan en las zonas A y B representan bloques potencialmente inestables cuando se combina con los polos de los planos basales en la zona A.

Con esta construcción, se definen tres contornos: uno central que es un sector del círculo de radio igual a ϕ (llamada zona A), y dos sectores simétricos y adyacentes a cada lado de éste (llamadas zonas B). Todo polo que esté dentro de la zona A es más susceptible a sufrir de ruptura por volteo que aquellos polos localizados en las zonas B. En cualquiera de los dos casos, el hecho que los polos estén en estas zonas sólo indican un potencial, y en adición a este análisis se debería validar tal situación analizando el espaciamiento promedio de la familia de discontinuidades.

3.3.2. Método de las vigas empotradas superpuestas

Un método que ayuda a estimar el factor de seguridad al modo de ruptura de volteo es de las *vigas empotradas superpuestas* [1, 52].

En este método se tiene que encontrar el ángulo crítico del plano de deslizamiento basal (ruptura global); también se tiene que hallar el ángulo de buzamiento (ζ) de las discontinuidades totalmente persistentes que buzan en contra del talud con un ángulo casi vertical (*i.e.* $80 \leq \zeta \leq 90$). Asimismo, se tiene que conocer la distancia de espaciamiento constante o promedio equivalente (t) de los planos de discontinuidad (*i.e.* altura de la viga). Y finalmente, se tiene que encontrar la longitud de la viga representativa para el análisis l_{rep}. La Figura 3.16 muestra las variables que interviene en el cálculo.

Con la longitud de la viga representativa se hace un análisis de la flexión de una viga empotrada de roca; donde se compara si el esfuerzo de tracción generado en la flexión es mayor a la resistencia a tracción de la roca; cociente que da un similar concepto a un factor de seguridad.

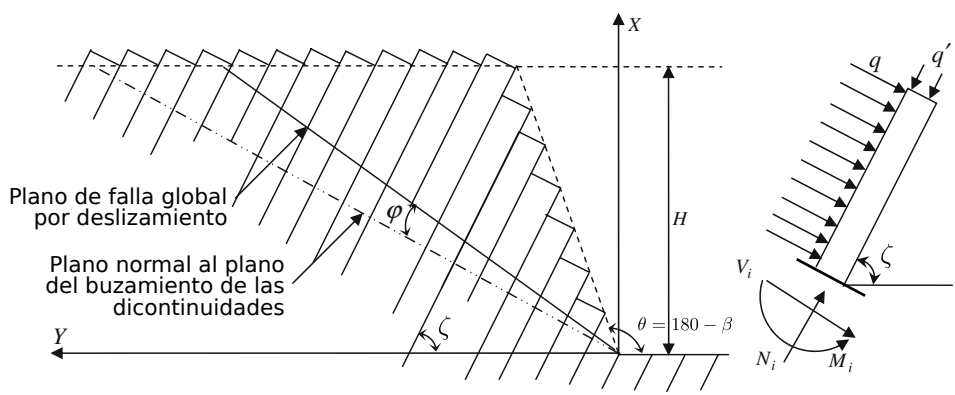


Figura 3.16 Variables que intervienen en el análisis de estabilidad por volteo [1].

La parte sensible de este método es el encontrar l_{rep} que está en una relación polinómica cuadrática con la altura global del talud h, el ángulo del talud β, el ángulo de buzamiento de las discontinuidades ζ, el ángulo denotado por φ que resulta ser el ángulo entre la traza del plano de ruptura basal y el plano que es normal a los planos de discontinuidades .

Por esta razón la solución de l_{rep} se hace con la ecuación cuadrática

$$l_{\text{rep}} = \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1}; \tag{3.18}$$

donde los coeficientes a_1, a_2 y a_3 están dados por las siguientes expresiones:

$$a_1 = \frac{\tan(\zeta - \varphi)\cos^2\varphi}{\tan(\zeta - \varphi) + \tan(\beta - \zeta + \varphi)}, \tag{3.19a}$$

$$a_2 = \frac{2\cos(\beta - \zeta + \varphi)\cos\varphi}{\sin\beta} h, \tag{3.19b}$$

$$a_3 = \left(\frac{\cos(\beta - \zeta + \varphi)}{\sin\beta} h\right)^2. \tag{3.19c}$$

Una vez que se encuentra l_{rep} se calcula el factor de seguridad con base a la resistencia a tracción uniaxial del material rocoso σ_{ti}, el peso unitario del material rocoso γ, y las otras variables ya definidas: t y ζ:

$$f_{\text{s}} = \frac{t|\sigma_{\text{ti}}|}{3l_{\text{rep}}^2 \gamma \cos\zeta} \tag{3.20}$$

El ángulo φ es igual a

$$\varphi = |(90^\circ - \zeta) - \alpha_{\text{cr},base}|, \tag{3.21}$$

siendo $\alpha_{\text{cr},base}$ la inclinación del plano de ruptura global.

Ejercicio 3.7. Estimar el factor de seguridad por ruptura de volteo mediante el método de las vigas empotradas superpuestas para las siguientes posibles inclinaciones de la superficie de ruptura global por deslizamiento:

1. $\alpha_{\text{cr},base}$ =20 °, para Navier con $\phi = 30$ °;
2. $\alpha_{\text{cr},base}$ =52.5 °, para Mohr-Coulomb con $\phi = 30$ ° y $c = 2$ MN m^{-2};

El talud tiene una altura de 20 m y está cortado a una inclinación de 85 °en un macizo rocoso que tiene discontinuidades totalmente persistentes de dirección de buzamiento a 180 °la dirección de la cara del talud, que buzan a 47 °y están espaciadas cada 2.3 m.

El peso unitario del material rocoso es de 19 kN m^{-3} y su resistencia a tracción uniaxial de -6 MPa.

Solución 3.7. Tomando en cuenta las anteriores variables se obtiene que $a_1 = 0.167$, $a_2 = 17.919$ y $a_3 = 94.74$ dando un $l_{\text{rep}} = 5.6$ m para tener al final el factor de seguridad contra ruptura por volteo de 11.41 para la inclinación de la superficie de ruptura global

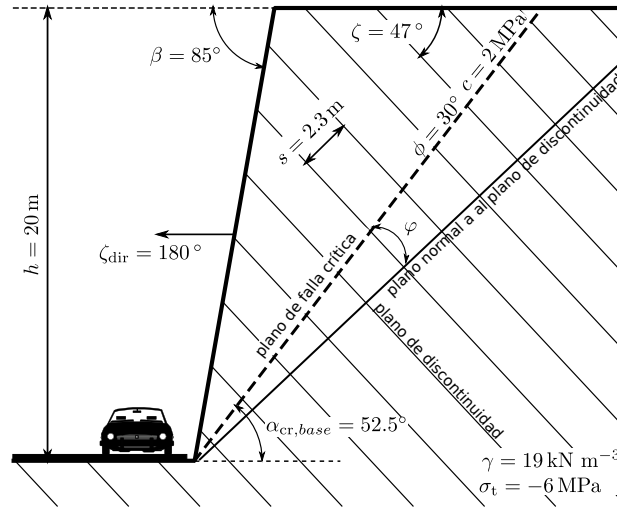


Figura 3.17 Esquema del talud que se plantea en el ejercicio 3.7.

por deslizamiento de 20 °. Similar; para la otra inclinación de 52.5 °se obtiene $a_1 = 0.406$, $a_2 = 26.755$ y $a_3 = 183.97$ que da un $l_{\mathrm{rep}} = 7.8$ m para tener al final el factor de seguridad contra ruptura por volteo de 5.84. □

3.4. Ruptura circular

La ruptura esférica se produce cuando el macizo rocoso colapsa en forma conjunta como una masa en sí, y no como un fenómeno de deslizamiento de uno o varios paralelepípedos individuales; sin embargo, esta ruptura es distinta de la que llegaría a producir una ruptura por caídas de roca.

En macizos rocosos, la ruptura esférica es el caso tridimensional de la ruptura circular. Los métodos de análisis de estabilidad en macizos rocosos por medio del método de equilibrio límite son los mismos que los empleados en el análisis de estabilidad de suelos, con la diferencia que es recomendable usar un criterio de ruptura más apropiado para el macizo rocoso.

Cuando el macizo rocoso tiene varias familias de discontinuidades, más otras discontinuidades aleatorias que en total forman partículas de rocas de distintas dimensiones en el mismo, es posible asumir que el material es homogéneo y continuo. Bajo esta condición uno puede adoptar el propio criterio de ruptura de Mohr-Coulomb usado en suelos; o mucho mejor, usar el criterio de ruptura de Hoek-Brown para macizos rocosos.

Ejercicio 3.8. Para el macizo cuyo material rocoso fue descrito en el Ejercicio 1.1 se obtuvo que el *Gsi* está en un intervalo de $[60;75]$. Si se prevé que el proceso de excavación del talud que se desea cortar alterará el macizo dando un factor $D = 0.80$. Encuentre el factor de seguridad del talud, sabiendo que tiene una altura de 120 m y una inclinación global de 75 °, con distancias horizontales en la pata de 20 m y en la corona de 30 m. Se recomienda que genere más de 100 superficies de ruptura. El peso unitario del macizo rocoso es de 0.023 MN m^{-3}.

Solución 3.8. Dependiendo del número de superficies de ruptura tomadas y especialmente la aleatoriedad de la escogencia de éstas en el análisis, el factor de seguridad para $Gsi = 60$ está en el intervalo $[2.6, 3.4]$, mientras que para $Gsi = 75$ dentro de $[5.9, 7.7]$. La siguiente tabla resume los valores de los parámetros del macizo para los dos valores entremos del *Gsi* y el valor medio de los mismos con $D = 0.8$. □

Variable	Unidad	Valor para distintos *Gsi*		
		60	68	75
m_b	1	1.075	1.730	2.624
s	1	0.0023	0.0078	0.0226
a	1	0.503	0.502	0.501

Existe cartas de estabilidad desarrolladas para el modelo de ruptura de Hoek-Brown desarrolladas por [47]. Estas cartas de estabilidad fueron desarrolladas para un factor de alteración $D = 0$. En las ordenadas de ellas se obtiene el factor N que está dado por

$$N = \frac{\sigma_{ci}}{\gamma H F_s}; \tag{3.22}$$

mientras que en las abscisas y las líneas se dan los valores de m_i y *Gsi*.

Por lo general se conoce a *priori* el valor de m_i y *Gsi*, por lo que el objetivo es el encontrar N para luego despejar F_s dados H y β, éstos últimos que son respectivamente la altura e inclinación del talud.

Por ejemplo la Figura 3.18 muestra la carta de estabilidad para un talud cuya geometría del talud es aplicable al caso del Ejercicio 3.8. Para el valor de $m_i = 11.6$ y $Gsi = 60$, $N \approx 2$. Al despejar F_s de la ecuación 3.22 y reemplazar los valores se tiene que $F_s \approx 25$. Debido a que la carta de estabilidad se aplica para $D = 0$ entonces el factor de seguridad es mayor a los hallados en el Ejercicio 3.8.

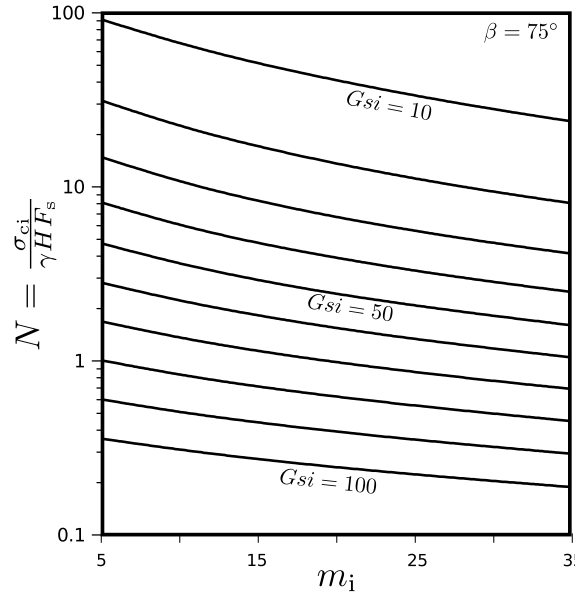


Figura 3.18 Carta de estabilidad del criterio de ruptura de Hoek-Brown para una inclinación de talud de $\beta = 75°$.

3.5. Caída de rocas

La caída de una roca puede verse como una eventual inestabilidad donde una masa individual se desprende del macizo rocoso, mientras que las caídas simultáneas de rocas pueden ser un acontecimiento previo de un movimiento masivo de gran escala como un deslizamiento, una avalancha o un flujo de rocas. En el caso de tratarse de la primera eventualidad, que tiene una frecuencia y una magnitud dada por el volumen de la masa, puede ser una amenaza para la vida e infraestructura humana.

En esta sección se verá sólo el caso de la caída de una roca individual como un fenómeno de inestabilidad fortuita. Se dice que la caída de una roca, un grupo de rocas, es un fenómeno de peligrosidad de tipo natural, espontáneo y rápido [19].

El objeto del predecir la potencial caída —en frecuencia y magnitud— de una roca no sólo requiere estimar el punto final de llegada, sino también se requiere que se cuantifique las energías cinéticas y las alturas de rebote de cada uno de los puntos durante todo su trayecto. Por tanto, un completo estudio de la caída de rocas necesita de simulaciones mediante modelos que definan la *trayectografía* del fenómeno desde la zona de desprendimiento hasta la zona de depositación de la misma. Por tanto, es necesario que se caracterice la zona desprendimiento, la zona de tránsito del trayecto (*i.e.* la zona por donde pasa la roca) así como la zona de depósito (*i.e.* la zona donde la roca deja de moverse). Una vez descrito

el fenómeno y caracterizadas las zonas mencionadas se termina el estudio con la cuantificación de la amenaza del fenómeno. El producto final de las simulaciones es el de producir un mapa de susceptibilidad o un mapa de amenazas, para finalmente tomar acciones que disminuyan la amenaza o la vulnerabilidad.

Las fases del estudio de caídas de roca se han agrupado en seis:

1. Fase de preparación.

   a) Revise los eventos históricos reportados y de los estudios que se estén llevando a cabo en la actualidad en el sitio de estudio.
   b) Haga el trabajo de campo en las zonas de desprendimiento, tránsito y de depósito. Se tiene que definir los volúmenes potenciales de rocas inestables a partir de la descripción del macizo rocoso en el zona de desprendimiento. En la zona de tránsito y de depósito, se tiene que registrar la ubicación, el tamaño, y la forma de los fragmentos de rocas ya desprendidos. Trate de determinar la frecuencia de las caídas de roca a partir de los impactos de las rocas en los árboles. Hacer un inventario de las medidas de protección contra la caída de rocas, si es que existiese.
   c) Realice entrevistas a habitantes locales de sitio de influencia del fenómeno de caída de rocas; así como también a los expertos que hayan trabajado en el problema. Prepare y verifique los modelos digitales de la superficie del terreno.
   d) Prepare los datos de entrada del modelo, tales como los parámetros de rebote de la superficie del terreno y los obstáculos que existen durante la trayectoria de la caída de rocas.

2. Fase de definición del escenario donde se produce el fenómeno de desprendimiento de rocas.

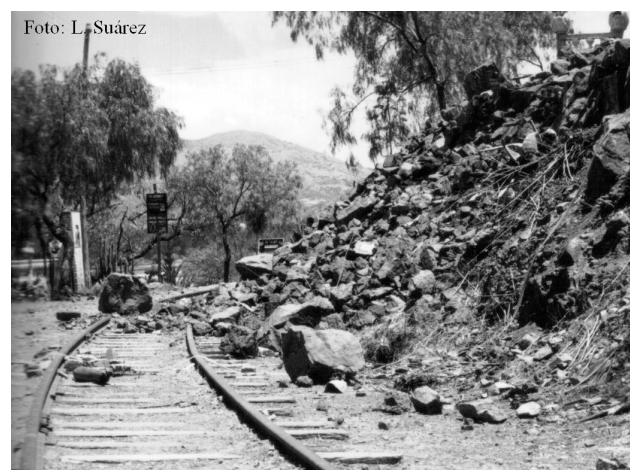


Figura 3.19 Caída de rocas, vía férrea estatal de Cochabamba a Aiquile, Bolivia.

a) Defina los lugares donde se desprenden las rocas.
b) Defina el tamaño y la forma de las rocas que caen.
c) Defina si es posible, la probabilidad de ocurrencia de los desprendimientos.

3. Fase de simulación de la caída de rocas.

a) Repita las simulaciones hasta que los resultados (*i.e.* las energías, las alturas de rebote, las longitudes de rodado de las rocas) converjan; es decir hasta que los resultados de la simulación sean parecidos a las observaciones reales en el sitio.

4. Fase de validación y credibilidad.

a) Compare las posiciones reales de los puntos de reposo final de las rocas, las alturas de impactos en los árboles y los cráteres de impacto en la superficie del terreno o en obras civiles con los mismo obtenidos en el modelo.
b) Estime el efecto que se puede tener en aquellos elementos que existen en la realidad –tales como vías, taludes, edificaciones— que no se representan en el modelo.
c) Compare sus estimaciones con modelos simples, analíticos y cerrados; por ejemplo la aproximación lineal por energías.
d) Si después de los tres pasos anteriores, los resultados simulados no se pueden explicar, las fases de simulación de la caída de rocas y de validación y credibilidad se pueden iterar con pequeñas modificaciones con base a un análisis de sensibilidad.

5. Fase de fijación de los resultados del modelo.

a) Haga el post-procesamiento para descartar los puntos fuera de las predicciones (*i.e.* *outliers*).
b) Defina el dominio de validez de los resultados del modelo.

6. Fase de transformación de los resultados en mapas de procesos de caídas de rocas.

a) Derive o cree un conjunto de datos espaciales distribuidos a partir de los datos interpretados que se hayan validado y establecido en la anterior fase, que da información de las zonas de tránsito de rocas y la cinemática para la zona de estudio.
b) Si se considera apropiado, se puede definir una probabilidad temporal de ocurrencia para los mapas de procesos que se haya creado.

Los fenómenos de caídas de roca normalmente son más acentuados en pendientes que forman precipicios (*cliffs*). Por tanto, después que la roca se desprende del macizo ella empieza un movimiento que puede agruparse en cuatro diferentes modos:

- caída libre;
- rebote en la superficie del terreno en la cara del talud;
- rodado sobre la superficie del terreno en la cara del talud;
- deslizamiento sobre la superficie del terreno en la cara del talud;

Los límites de referencia de estos cuatro modos de la cinemática de la roca son respectivamente: mayor a 70 °hasta valores negativos del ángulo; mayor a 45 °pero menor a 70 °; mayor a 30 °pero menor a 45 °; y menor a 30 °. Sin embargo, estos límites pueden variar según las condiciones de las variables que gobiernan el movimiento.

En la caída libre, la roca cae desde un acantilado bajo la influencia sólo de la fuerza de gravedad. Si la roca no es simétrica en los tres ejes coordenados ortogonales y se considera rígida, el tensor de inercia de la misma tomará también importancia. En este caso se analiza la dinámica de un cuerpo rígido con seis grados de libertad. Si la roca aún rígida se asume simétrica por simplicidad, se analiza la dinámica de la misma con tres grados de libertad. La solución se calcula para cada intervalo de tiempo con la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias del movimiento del cuerpo rígido, obtenidas de la segunda ley de Newton, y la conservación de los momentos lineales y angulares.

En adición, se tiene que emplear algoritmos para detectar la colisión de la roca que impacta con la superficie del terreno (u otra superficie, como por ejemplo la superficie de una obra civil). Aquí el comportamiento del rebote está gobernado por las características de la superficie del terreno y las propiedades mecánicas de la roca.

Luego de varias colisiones, se pierde tanta energía, que la roca empieza a rodar. En esta fase, la roca rueda por la superficie del terreno a una determinada velocidad angular. Si la velocidad angular ya no es suficiente, la roca empieza a deslizarse por la superficie del terreno a una velocidad que es función de la fricción cinemática que existe entre la roca y la misma superficie.

En todos estos casos se puede presentar una combinación de estos modos cinemáticos, y durante el proceso un modo puede cambiar a otro.

3.5.1. Movimiento libre de una roca

La roca está sujeta a la interacción de fuerzas externas iniciales, que en conjunto con el campo gravitacional, generan el inicio del movimiento.

3.5.1.1. Sin resistencia del aire

La trayectoria en tres dimensiones del movimiento libre de una roca —que no genera resistencia por el aire e inmerso en el campo gravitacional de la Tierra— dados un vector de posición inicial $\boldsymbol{s}_{\mathrm{o}}$ relativo a un origen, un vector de velocidad inicial $\boldsymbol{v}_{\mathrm{o}}$ y para un tiempo dado (t_i) está representada por

$$\boldsymbol{s}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{s}_{\mathrm{o}} + \boldsymbol{d}_{\mathrm{i}}, \tag{3.23}$$

donde $\boldsymbol{d}_{\mathrm{i}}$ es el vector desplazamiento para el tiempo t_i que es

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{o}} t_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{g} t_i^2. \tag{3.24}$$

Además, el vector velocidad de aquella roca para aquel tiempo t_i, es

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{o}} + \boldsymbol{g} t_i. \tag{3.25}$$

Si el sistema coordenado es Cartesiano dextrógiro con el eje z vertical y por ende paralelo a la dirección del vector del campo gravitacional terrestre entonces

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Los dos vectores —dados por las ecuaciones y — definen el nuevo estado de la roca para el tiempo t_i a partir de sus condiciones iniciales. Si durante un intervalo $[t_{\mathrm{o}}, t_{\mathrm{f}}]$ la roca no sufre perturbaciones, las ecuaciones de arriba rigen el movimiento de la misma y definen su nueva velocidad y posición.

Muchas veces se quiere tener despejado el vector de velocidades final respecto a los vectores desplazamiento y la aceleración. Veamos si aquello es posible. Por lo normal, se parte de la definición de aceleración

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{\mathrm{o}}}{t}, \tag{3.27}$$

y por la expresión de la Eq. 3.24.

Reemplazando la ecuación 3.27 en 3.24 se tiene que

$$\boldsymbol{d}_i = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{o}} + \boldsymbol{v}_i) t_i. \tag{3.28}$$

Lo que en muchos textos se hace es que a partir de la Eq. 3.5.1.1 se despeja t, para luego esta expresión reemplazarla en la expresión de la Eq. 3.28, es decir

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{o}} = \boldsymbol{g} t_i. \tag{3.29}$$

Sin embargo, hay que tomar en cuenta que no existe la inversa de un vector, por tanto el despeje de t no es tan sencillo cuando $\boldsymbol{g}$ es un vector. Para ello se toma como inversa la pseudo-inversa de Moore-Penrose que indica que

$$\boldsymbol{g}^{+} = \begin{cases} \left(\frac{1}{g' g}\right) \boldsymbol{g}' & \text{para } \boldsymbol{g} \neq 0 \\ \boldsymbol{0} & \text{para } \boldsymbol{g} = 0 \end{cases}, \tag{3.30}$$

y se ante-multiplica a ambos lados de la expresión en 3.29

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}^{+}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{o}}) &= \boldsymbol{g}^{+}\boldsymbol{g}\, t_i. \\ &= t_i. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Finalmente, reemplazando la expresión de la Ec. en la expresión de la Eq. 3.28 se tiene

$$\boldsymbol{d}_i = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_{\mathrm{o}})\boldsymbol{g}^{+}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{o}}), \tag{3.32}$$

que es una ecuación a partir de la cual no se puede despejar $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}$ del resto de los términos, a no ser que los vectores sean escalares.

Ejercicio 3.9. Calcule los vectores velocidad y posición finales para el tiempo $t = 3$ s de una roca que se mueve en un plano, y donde en su estado inicial tiene una posición de $(10\ 10)^{\mathrm{T}}$ m y velocidad $(3.5\ 0)^{\mathrm{T}}$ m s^{-1}.

Solución 3.9. La función `airblockmovement2d` en MATLAB® posibilita el cálculo los vectores $\boldsymbol{s}_{\mathrm{i}}$ y $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}$ a partir de similares valores iniciales para un tiempo posterior dado. De este modo, al digitar las variables de entrada y empleando la mencionada función

```
initialVelVec =[ 3.5, 0 ]; % in meters per second
initialBlockPosVec =[10, 10]; % in meters
timeValue =3; % in seconds

[ velVecTime, posVecTime ] =airblockmovement2d ...
   ( initialVelVec, initialBlockPosVec, timeValue );
```

se tiene que después de tres segundos las condiciones iniciales, la roca tienen los vectores iguales a los siguientes valores

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -29.4 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{s}_3 = \begin{pmatrix} 20.5 \\ -34.1 \end{pmatrix}.$$

□

3.5.1.2. Con resistencia del aire

Cuando se quiere tomar en cuenta la influencia del aire en la forma la partícula de roca, la trayectoria de ésta se ve influenciada por una fuerza aerodinámica sobre la roca. Si el aire está estático, la fuerza de resistencia del aire ($\boldsymbol{F}_{\mathrm{ra}}$) se opone al movimiento resultante de la roca. Esta fuerza de resistencia depende de la magnitud de la velocidad de la roca ($v = |\boldsymbol{v}|$), de la forma de la sección (resultado de la proyección ortográfica de la roca perpendicular a la orientación de la velocidad A), la densidad del aire (ρ_{a}), y del coeficiente aerodinámico (C_{d}).

Si la roca es irregular, existiría un distinto valor de A para cada orientación de la velocidad. Si la roca es esférica A es constate, y la fuerza de resistencia del aire sería

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ra}} = -0.5\rho_{\mathrm{a}} v^2 C_{\mathrm{d}} A\, \boldsymbol{u}_{\mathrm{v}} \tag{3.33a}$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{3.33b}$$

Si el aire está en movimiento con una velocidad y una orientación dadas, existe una fuerza adicional por el choque del aire sobre la roca; que depende de la velocidad relativa del viento con la velocidad de la roca, de la forma de la sección transversal normal a cada uno de los componentes de esta velocidad relativa, de la densidad del fluido y de un coeficiente aerodinámico (éste último que depende de la viscosidad del fluido y el régimen aerodinámico).

Al ser una fuerza la resistencia de aire, está influye en la aceleración o desaceleración de la roca en alguno de los sentidos de las componentes de la velocidad inicial.

Tomar en cuenta la influencia de la resistencia del aire y de un aire en movimiento no es práctico para el caso de las predicciones de caídas de roca, debido a que difícilmente estos dos factores o uno de ellos modificará de forma sustancial la tendencia de la trayectoria de la roca, más aún para rocas de grandes dimensiones.

3.5.2. Impacto y rebote de una roca

Con las anteriores ecuaciones se logró modelar la trayectoria de una roca en el espacio; sin embargo es de mayor importancia conocer los fenómenos que ocurren cuando la roca impacta contra la superficie del terreno u otro obstáculo.

Cuando la roca choca con la superficie del terreno u otro obstáculo se tiene que analizar el intercambio de energía entre la roca y esta superficie. En este intercambio de energías puede ocurrir al menos las siguientes situaciones, donde la roca:

- recibe tal fuerza dinámica que se parte en más de una parte; en este caso, se estima un vector de velocidad de salida por cada parte nueva; y
- no se parte pese a la fuerza dinámica del impacto; en este caso, se estima el nuevo vector de velocidad de rebote de la roca.

Sin embargo, en cualquiera de los dos casos la roca no preserva toda su energía después de su impacto; sea por el amortiguamiento de la superficie de impacto con la roca, o por la capacidad de deformación (*i.e.* transformación de algo de la energía cinemática que tiene la roca a energía elástica) que tiene la roca. Por tanto, se tiene que estimar cuánto de energía cinética que tenía la roca antes del impacto se ha transformado en otro tipo de energía. De este modo, se tienen que usar métodos físicos o empíricos para dar un valor nuevo de

energías después del impacto; traducidos a valores de las magnitudes de las velocidades de salida.

Asimismo, para el caso donde la roca se conserva *intacta* después del impacto, el vector de velocidad de salida después del impacto con la superficie cambiaría de orientación debido a la posición de la superficie y en caso de tener ondulaciones mayores a la dimensión mayor del contorno de la roca.

Para el caso donde la roca se fragmente con el impacto, hay que determinar el vector de las velocidades de salida de las partículas resultantes del impacto sería aún más complejo. En este caso, se tiene que usar criterios geométricos y físicos para estimar las nuevas orientaciones de los vectores de velocidades.

El caso más sencillo de análisis y modelamiento del impacto de una roca con una superficie de terreno dada, se daría cuando se tenga:

- rocas totalmente esféricas, de masa constante, rígidas e irrompibles a las magnitudes de impacto, y con coeficientes de restitución constantes;
- superficies del terreno y de obstáculos constituidos por mallas de planos triangulares (que definen la ondulación de la superficie del terreno), cuyas áreas son mucho mayores al diámetro de las rocas esféricas.

La interacción entre un fragmento de roca y la superficie del terreno que resulta en un fenómeno de caída-rebote es de tipo: cuerpo en movimiento *v.s.* cuerpo fijo.

Se analiza ahora el caso más simple del impacto de una roca con la superficie del terreno; donde se asume que la roca es totalmente esférica y reducida a un punto, de masa constante, rígida e irrompible a las magnitudes de impacto. Con esto, la roca podría prescindir de su forma como cuerpo en la interacción física; y por ende, no es necesario tener información acerca de su cantidad de momento rotacional en el tiempo; y sólo se tendrá que analizar la cantidad de momento lineal.

El modelo simple indica que existen dos energías, uno antes y el otro después del impacto con la superficie del terreno o el obstáculo. La diferencia de estas dos energías permite estimar la pérdida de energía durante el choque.

La roca toca la superficie del terreno con una orientación representada por un vector unitario ($\boldsymbol{u}_{\text{in}}$) que es paralelo al vector de velocidades inmediatamente antes del impacto (velocidad incidente $\boldsymbol{v}_{\text{in}}$). Por tanto, se puede analizar la respuesta física del impacto a dos componentes: un componente paralelo (con subíndice t) a la superficie del terreno y otro normal al mismo (con subíndice n). En términos de la velocidad incidente, se tendría

$$\boldsymbol{v}_{\text{in}} = \boldsymbol{v}_{\text{in,t}} + \boldsymbol{v}_{\text{in,n}}. \tag{3.34}$$

De este modo, la relación de los componentes tangencial y normal de la velocidad incidente con los propios de la velocidad de restitución ($\boldsymbol{v}_{\text{res}}$) es proporcional a dos coeficientes de restitución paralelos a esos componentes

$$|\boldsymbol{v}_{\mathrm{res,n}}| = C_{\mathrm{R,n}}|\boldsymbol{v}_{\mathrm{in,n}}|, \tag{3.35a}$$

$$|\boldsymbol{v}_{\mathrm{res,t}}| = C_{\mathrm{R,t}}|\boldsymbol{v}_{\mathrm{in,t}}|. \tag{3.35b}$$

El caso más simple aún, asume que $C_{\mathrm{R,n}}$ y $C_{\mathrm{R,t}}$ sean constantes para cualquier ángulo de incidencia. Y esto da a lugar a que estos coeficientes sean parámetros de la dupla interactiva de roca y superficie; que se estiman de forma aproximada mediante ensayos de laboratorio. Los valores de $C_{\mathrm{R,n}}$ y $C_{\mathrm{R,t}}$ varían en el intervalo $[0,1]$.

Si se toma como referencia la energía cinética ($mv^2/2g$) que tiene la roca antes y después del impacto (ΔE_{k}), entonces la pérdida de energía es [21]

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{mv^2}{2}\left(\frac{C_{\mathrm{R,t}}^2 + C_{\mathrm{R,n}}^2 \tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} - 1\right). \tag{3.36}$$

Esto indica que la energía cinética se puede reducir en cada impacto de roca con la superficie del terreno a un radio de:

- valores de $C_{\mathrm{R,t}}^2$ en trayectorias casi paralelas a la superficie del terreno;
- valores de $C_{\mathrm{R,t}}^2 + C_{\mathrm{R,t}}^2/2$ para un ángulo de incidencia θ de 45 °;
- valores de $C_{\mathrm{R,n}}^2$ en trayectorias con caídas casi normales a la superficie del terreno.

El ángulo θ de incidencia del vector de velocidades sobre la superficie donde impacta la roca se calcula a partir del vector normal al plano de la superficie ($\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}$) y el vector unitario de incidencia ($\boldsymbol{u}_{\mathrm{in}}$) del siguiente modo y en radianes

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(-\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{in}}\right). \tag{3.37}$$

En este análisis es importante ir controlando las energías pedidas o ganadas en cada impacto y rebote. Para ello se traza la *línea de energía* o la *carga de energía* por encima de la elevación instantánea de la roca. La elevación instantánea (z) da la energía potencial que tiene la roca, mientras que la línea de energía es la suma de la anterior con la energía cinemática ($|v|^2/2g$), algo así parecido a la carga hidráulica.

Cuando la roca está en el aire no existe disminución de energía cinética (si se asume que no existe resistencia del aire sobre la roca); mientras que si la roca se desliza o rueda por la superficie del terreno, la pendiente de la línea de energía es proporcional al ángulo de fricción dinámico entre roca y superficie. A cada impacto se disminuye la energía, por tanto existe una caída en la línea de energía.

Otra relación interesante es la relación ΔE_{k} *v.s.* $g\Delta x$, que sería la pendiente promedio de la línea de energía. Si esta relación es menor a la pendiente promedio de la superficie del terreno o del tramo donde la roca choca, entonces la roca se acelera y el rebote sería más largo y alto que su precedente. Si por el contrario, esta relación es mayor a la pendiente promedio de la superficie del terreno o del tramo donde la roca, entonces la roca desacelera.

3.5.3. Deslizamiento de una roca

Si no se tiene suficiente energía para que la roca rebote una vez más, entonces ella con una cierta velocidad de partida puede rodar o deslizarse. En este caso, el modelo tiene que cambiar para simular una de las dos situaciones, o ambas.

Esto implica, que se genere un umbral de velocidades de referencia (*e.g.* una velocidad de 0.5 m s^{-1} para decidir si termina el *modelo de rebote* y si este se pasa al modelo de deslizamiento o rodaje.

Cuando la roca pasa al modelo de deslizamiento, ella alcanza una velocidad menor a la velocidad de umbral de referencia (v_{th}). Sin embargo, la fuerza de rozamiento entre la roca y la superficie del terreno reducirá aquella velocidad en tasas de valores positivos, nulo o negativos (*i.e.* desaceleración).

Para el caso que ahora se analiza (*i.e.* del deslizamiento de una roca) la tasa de velocidad dependerá del sentido de la pendiente en la que la roca se esté deslizando con respecto el sentido del movimiento de ésta. Para el cálculo de la fuerza de rozamiento (F_{f}) se necesitará conocer el peso de la roca (que en el modelo de rebote se había ignorado) dado por mg, que influiría en la magnitud si la inclinación por donde la roca se desliza tiene un ángulo β con la horizontal.

La fuerza de rozamiento dependería entonces de un factor de fricción dinámico (μ_{d}), y estaría dada por

$$F_{\text{f}} = \mu_{\text{d}} mg \cos\beta, \tag{3.38}$$

donde $\mu_{\text{d}} = \tan\phi_{\text{d}}$.

La orientación de F_{f} es paralela a la orientación de la velocidad en el punto donde empieza el fenómeno de deslizamiento, pero de sentido contrario. Como se tiene la velocidad inicial cuando se inicia el deslizamiento y además la fuerza de fricción que desacelera la roca, se puede calcular en el tiempo el decremento de velocidad hasta un punto tal que la roca tiene velocidad nula.

3.5.4. Rodaje de una roca

Para el caso del modelo simple, el rodaje de una roca tiene una connotación similar al caso del deslizamiento de una roca. La ecuación que la define sería la misma para el caso del deslizamiento (*i.e.* 3.38) con la diferencia que el coeficiente de fricción diferenciará un fenómeno del otro.

El coeficiente de fricción para el caso de la rodaje de la roca depende de la relación de la ondulación de la superficie del terreno. Si las protuberancias de la superficie del terreno es mayor a la rugosidad de la roca, existe mayor posibilidad que la roca ruede a que se deslice.

De acuerdo a Kirkby y Statham [45] el valor del factor de fricción para el caso del rodaje de la roca se puede estimar conociendo la ondulación más probable de la superficie del terreno (d^*), el diámetro equivalente de la roca (d), la fricción básica del material de la superficie ($\mu_b = \tan\phi_b$) y un valor k de corrección:

$$\mu_r = \mu_o + k\left(\frac{d^*}{d}\right); \tag{3.39}$$

donde el valor de k está en el rango de $[0.17, 0.26]$.

Los valores numéricos de μ_r tienden a ser menores al de μ_f.

3.5.5. *Deslizamiento y rodaje de una roca*

Como se vió en las dos secciones precedentes, para el caso de un modelo simple, el deslizamiento y el rodaje son muy semejantes. Por tal razón, ambos fenómenos pueden agruparse en un sólo fenómeno.

Por tanto, en esta fase del modelo: la de deslizamiento o de rodaje, se tiene que calcular la longitud que la roca recorrería en deslizamiento o rodadura desde un punto de partida y con una velocidad inicial hasta el punto de parada bajo la misma pendiente. Para ello se usa el teorema de la energía cinética para el trabajo de desplazamiento, donde se toma en cuenta la fuerza debida al campo gravitacional (F_g) y la fuerza por fricción dinámica entre la roca y la superficie del terreno (F_f); además se pone la aceleración en términos de las velocidades final (v_f) e inicial (v_i). Al hacer operaciones y despejando el recorrido (s) que puede lograr la roca al deslizarse o rodar sobre la superficie del terreno, resulta la siguiente expresión, que en este caso independiente de la masa

$$s = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2g(\sin\beta - \mu\cos\beta)}. \tag{3.40}$$

En esta expresión, la variable μ se reemplaza por μ_r o μ_f si se está evaluando desplazamiento por rozamiento o por rodaje. La variable β sigue representando la inclinación de la pendiente.

De acuerdo a la ecuación anterior (Ec. 3.40), si $\mu\cos\beta > \sin\beta$ existe movimiento y una longitud de recorrido por parte de la roca sobre la superficie del terreno. Si esta longitud es menor a aquella de la superficie con pendiente constante, entonces la roca se detiene en algún punto antes que se cambie de pendiente. En este sentido, la distancia de detenimiento es

$$s_q = \frac{v_i^2}{2g(\mu\cos\beta - \sin\beta)}. \tag{3.41}$$

Si la longitud de recorrido por parte de la roca es mayor a la longitud de la superficie con pendiente constante, entonces ella pasa a una nueva superficie donde tiene las siguientes opciones: que la roca continúe des-acelerándose; que la roca se acelere pero que siga en el modo y modelo deslizamiento/rodaje; o que pase nuevamente al modo y modelo de caída libre. En el punto de cambio de pendiente, interesa la velocidad final, que está dada por

$$v_{\mathrm{f}} = \sqrt{2g\,s(\sin\beta - \mu\cos\beta) + v_{\mathrm{i}}^2}. \tag{3.42}$$

Si $\mu\cos\beta \leq \sin\beta$ no existe movimiento aún existiendo una velocidad no nula. Como el modelo es simplificado, esto implicaría un detenimiento abrupto de la roca cuando alcanza esta condición. Normalmente, para hacer al modelo más realista en esta condición se adiciona una distancia constante a partir de una velocidad umbral que se defina.

Para que la roca pase nuevamente al modo y modelo de caída libre, se puede asumir en la situación donde la diferencia de las dos inclinaciones de los planos en la transición es mayor a 45 °cuando la velocidad en el punto de transición es mayor a otro umbral, normalmente tomado como 5 m s^{-1}.

3.5.6. Teorema de la energía cinética para deslizamiento y rodaje

Para definir este comportamiento se parte de la segunda ley de Newton, donde la fuerza neta que hace mover la roca es la diferencia de la fuerza debida al campo gravitacional (F_{g}) y la fuerza por fricción (F_{f})

$$\left(F_{\mathrm{g}} - F_{\mathrm{f}}\right) = m\,a. \tag{3.43}$$

Al multiplicar ambos términos por un desplazamiento s para determinar el trabajo se tiene

$$\left(F_{\mathrm{g}} - F_{\mathrm{f}}\right) s = m\,a\,s. \tag{3.44}$$

El producto de la aceleración con el desplazamiento se obtiene de la ecuación cinemática

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{f}}^2 - v_{\mathrm{i}}^2 &= 2\,a\,s; \\ \frac{1}{2}\left(v_{\mathrm{f}}^2 - v_{\mathrm{i}}^2\right) &= a\,s. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Al reemplazar 3.45 en 3.43 se obtiene la siguiente expresión

$$\left(F_{\mathrm{g}} - F_{\mathrm{f}}\right) s = \frac{1}{2}\left(v_{\mathrm{f}}^2 - v_{\mathrm{i}}^2\right). \tag{3.46}$$

Si se colocan las expresiones de las fuerzas que intervienen con variables propias de mecanismo de deslizamiento en un plano inclinado con ángulo respecto la horizontal (β)

$$F_{\mathrm{g}} = mg\sin\beta, \tag{3.47a}$$
$$F_{\mathrm{f}} = mg\ \mu\cos\beta; \tag{3.47b}$$
$$\tag{3.47c}$$

y se hacen operaciones, se llega a la expresión

$$s = \frac{v_{\mathrm{f}}^2 - v_{\mathrm{i}}^2}{2g(\sin\beta - \mu\cos\beta)}. \tag{3.48}$$

3.5.7. Algoritmo del sitio de impacto

Luego de describir los fenómenos físicos de todas las posibles fases que intervienen durante la caída de una roca sobre una superficie de terreno dada, el siguiente paso es el de definir un algoritmo que identifique el tiempo o las coordenadas (o ambos grupos de variables) para los cuales la roca impacta con la superficie del terreno.

Este algoritmo se encargará de enlazar los fenómenos físicos con las condiciones del terreno, y finalmente el que representará a cada sitio de estudio.

La Figura 3.20 muestra como se logra obtener un resultado cuando se emplean los modelos arriba mencionados y el algoritmo para reconocer los diferentes puntos de impacto de la roca sobre la superficie del terreno.

3.5.8. El coeficiente de restitución

El coeficiente de restitución de una partícula de roca (COR: *Coefficient of Restitution*) —de una masa dada, forma y material y denotado por C_{R}— es un parámetro escalar de dimensión unitaria que cuantifica el cambio de velocidad de ésta cuando impacta contra otra, de masa semejante también en movimiento, ó contra una superficie de gran masa y sin movimiento. Si el impacto se da según el primer caso, el coeficiente de restitución es igual a la relación de la diferencia de velocidades de ambos cuerpos después y antes del fenómeno; mientras que, si el impacto se rige según las condiciones del segundo caso, este coeficiente total se representa por la relación de las magnitudes de la velocidad de la partícula en movimiento después del impacto ($|\boldsymbol{v}_{\mathrm{res}}|$, velocidad de restitución) con la misma antes del impacto ($|\boldsymbol{v}_{\mathrm{in}}|$, velocidad de incidencia)

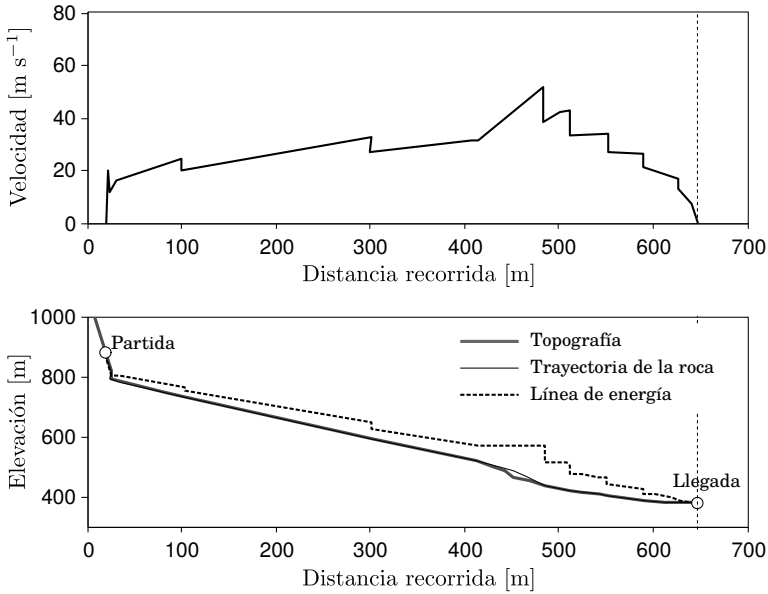


Figura 3.20 Simulación de la trayectoria de caída del perfil Sunnybrate (Canadá), [21]. Se usó en ese análisis un $C_{\mathrm{R,t}} = 0.8$, $C_{\mathrm{R,n}} = 0.70$, y $\mu_{\mathrm{r}} = 0.52$.

$$C_{\mathrm{R}} = \frac{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{res}}|}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{in}}|} \tag{3.49}$$

Para el caso donde la roca impacta en forma inclinada contra la superficie de gran masa sin movimiento, por lo normal el coeficiente de restitución se descompone en aquel normal ($C_{\mathrm{R,n}}$) y tangencial a la superficie ($C_{\mathrm{R,t}}$). Para ello, se descomponen los vectores de velocidades incidentes y de restitución en esas dos direcciones: dirección normal ($\boldsymbol{v}_{\mathrm{in,n}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{res,n}}$), y dirección tangencial ($\boldsymbol{v}_{\mathrm{in,t}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{res,t}}$); y los valores se obtienen como

$$C_{\mathrm{R,n}} = \frac{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{res,n}}|}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{in,n}}|} \tag{3.50a}$$

$$C_{\mathrm{R,t}} = \frac{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{res,t}}|}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{in,t}}|}. \tag{3.50b}$$

Los CORs también se pueden obtener de la relación de energías cinéticas de la partícula después y antes del impacto.

Se tiene conocimiento de pocos diseños de ensayos de laboratorio, aún no estandarizados, para estimar el COR en materiales rocosos. Todos estos ensayos se basan en repetir

y asemejar en laboratorio el fenómeno de caída de rocas sobre una superficie del mismo material a varias inclinaciones (*e.g.* de 10 °a 70 °).

Sin embargo, es más común estimar sólo el $C_{R,n}$ a través de ensayos de partículas esféricas de masa igual en caídas libres verticales sobre una superficie plana pulida horizontal, lo cual daría el valor sólo de $C_{R,n}$. Ya para el análisis se define que $C_{R,t}$ es una proporción de $C_{R,n}$. Si se sigue este procedimiento, la expresión para la obtención de $C_{R,n}$ se vuelve más simple, al iniciar el análisis a través de la expresión que relaciona la magnitud de la velocidad vertical con la altura de caída (h)

$$v = \sqrt{2gh}, \tag{3.51}$$

que al reemplazar en la definición de $C_{R,n}$ resultaría en

$$\begin{aligned} C_{R,n} &= \frac{v_{res,n}}{v_{in,n}} \\ &= \frac{\sqrt{2g\,h_{res}}}{\sqrt{2g\,h_{in}}} \\ &= \frac{h_{res}}{h_{in}}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Se ensayaron la caída de partículas esféricas metálicas de 40 mm de diámetro sobre una superficie plana compuesta por material rocoso [63, 38], otros emplearon partículas de roca sin ninguna forma geométrica definida o partículas de rocas artificiales de forma geométrica definida (*i.e.* creados con materiales aglomerantes, de formas esféricas, cúbicas, cilíndricas y dodecahédricas) para un ensayo semejante al anterior [11]. Los diámetros de esferas equivalentes de las partículas variaron de 40 mm a 76 mm y las alturas de caída ensayadas variaron de 0.8 m a 1.6 m. El Cuadro 3.2 muestra valores de coeficientes de restitución de algunos materiales rocosos [38].

Cuadro 3.2 Coeficiente de restitución de materiales rocosos [38].

Material rocoso	Coeficiente de restitución C_R
Caliza	0.896 a 0.915
Arenisca de grano grueso	0.801 a 0.895 (0.851)
Granito de grano fino	0.809
Mármol	0.868

Si la partícula no sufre degradación durante el impacto, se pueden emplear las técnicas de análisis dimensional para encontrar el valor numérico del coeficiente de restitución para varias formas amorfas mediante modelos reducidos de laboratorio.

Una forma sencilla de hallar el coeficiente de restitución es a través de la caída libre de una esfera del material que se estudia desde una altura conocida. La superficie que recibe a la esfera tiene que ser horizontal y plana. Cuando la esfera impacta con esta superficie ella se eleva nuevamente debido al coeficiente de restitución y genera varias caídas libres de menor energía cada vez, hasta que la misma deja de rebotar y empieza a rodar. En el ensayo de caída libre se pueden tener varias lecturas antes de que la esfera no rebote; por tanto, por cada caída libre se tienen medidas redundantes del fenómeno que se pueden usar para hallar el COR promedio y su varianza o desviación estándar. El ensayo puede ser muy sencillo, la forma de registrar el impacto de la esfera con la base se puede hacer por medio de un micrófono conectado a la tarjeta de sonido de cualquier computador; y los datos capturados en un programa de programación, por ejemplo MATLAB®. Luego el COR se calcula usando un algoritmo como el que se muestra en la función `coefrestitutiontest.m` que incluye en este texto.

Lista de ejercicios

3.1. Un tramo de 50 m de vía vehicular tiene una pendiente de 0 % y una orientación de N265 °. Este tramo pasa por un macizo rocoso que tiene dos familias de discontinuidades totalmente persistentes con orientaciones de 045\60 y 315\30. El ángulo de fricción de ambas familias es de 40 °. Determine si existe falla plana o falla por cuña por el método cinemático, si el corte de la vía en ese sitio será tipo cajón con inclinaciones de 80 ° y alturas de 12 m.

3.2. Un tramo de vía curvo tiene una tangente de entrada orientada N080 °, un ángulo de deflexión (Δ) negativo de 100 ° y un radio de curvatura (R) de 50 m. La pendiente vertical es de 0 %. Además, el tramo está dentro de un macizo rocoso con las siguientes familias de discontinuidades, todas ellas totalmente persistentes: 280/25, 100/85 y 190/50. Asuma que todas las discontinuidades tienen un ángulo de fricción de 30 ° y que en todo el tramo se tiene planeado hacer cortes en el lado derecho de la vía con alturas de 20 m e inclinaciones en una relación $H : V$ de 1.5 : 2; y en el lado izquierdo con alturas de 10 m e inclinaciones en una relación $H : V$ de 1.5 : 3.

Elabore una tabla donde indique por sub-tramos y para ambos lados: si existe o no posibilidad de algún tipo de inestabilidad en el macizo al hacer los cortes; y en el caso de existir tal posibilidad, especifique de qué tipos son. Haga una discretización de la curva en segmentos ≤ 10 m.

Recuerde sus conocimientos de *curva circular simple* de diseño geométrico de vías, donde la distancia desde el punto de intersección de las tangentes hacia el inicio y fin de la curva circular es igual a

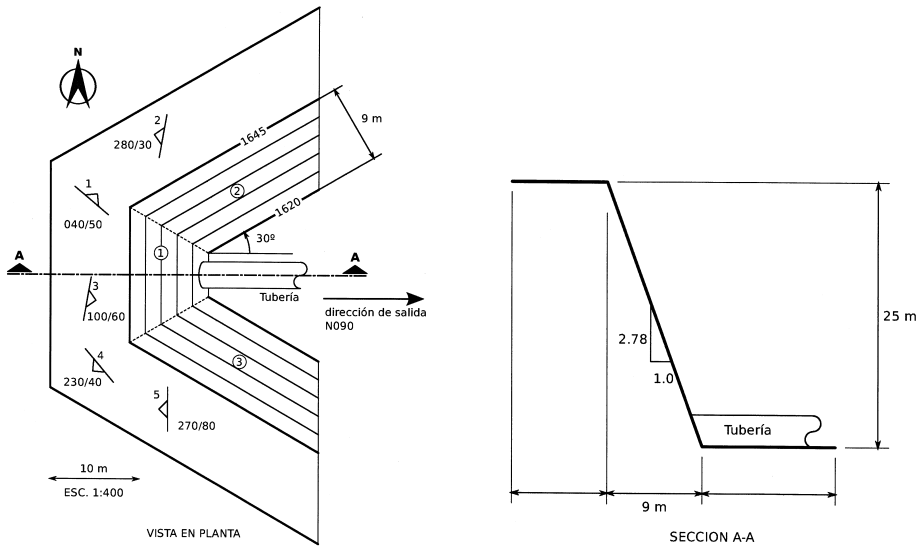
$$T = R \tan\left(\frac{\Delta}{2}\right);$$

este valor de T le posibilitará construir todo el arco de circunferencia.

3.3. Una tubería de conducción de agua sale de un túnel en dirección N090. El portal del túnel tiene tres taludes cuyas propiedades geométricas se muestran en la figura. Identifique sólo por el método cinemático si existe algún tipo de potencial inestabilidad (*i.e.* falla plana, falla de cuña o falla por volteo) en los tres taludes del portal del túnel que están albergados en un macizo rocoso que tiene cinco familias de discontinuidades orientadas tal como se muestra la figura. El ángulo de fricción entre las superficies de las discontinuidades ϕ_d para todas ellas es de 20 °.

3.4. Una tubería de carga de 10 ” de diámetro se dirige a una pequeña central hidroeléctrica superficial con una dirección respecto del norte de 180 ° y desciende de una ladera de roca con una pendiente de 75 °. El cadenamiento (*i.e.* el abscisado) de la tubería es desde el punto más alto al más bajo (Figura 3.22).

Para poder instalar la tubería se hizo un corte cajón a ambos lados de 80 ° de inclinación, dando lugar a taludes de corte de 8 m de altura en la parte más desfavorable. En el macizo



(a) vista en planta (b) sección A-A

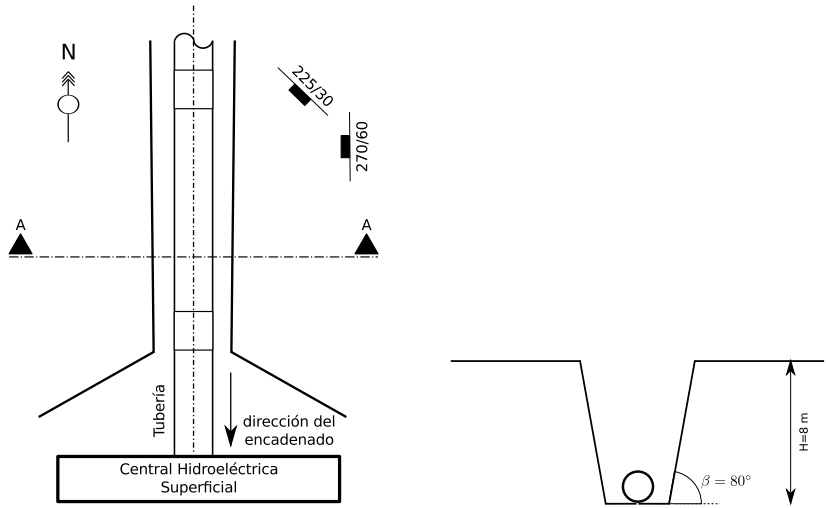
Figura 3.21 Esquema de la tubería y el túnel (Problema 3.3).

rocoso se encontró dos familias de discontinuidades totalmente persistentes de orientación 225/30 y 270/60. Asimismo, ambas familias de discontinuidades tienen un ángulo de fricción interna básica de 32 ° pero sus ángulos de dilatancia son de 5 ° y 10 ° respectivamente para las familias 225/30 y 270/60.

1. Verifique si existe falla por cuña para el talud izquierdo para las propiedades de resistencia de las discontinuidades: más y menos favorables.
2. Calcule el factor de seguridad al deslizamiento para aquella familia de discontinuidades que genera falla plana, sabiendo que el coeficiente de rugosidad del modelo Barton-Choubey —para una discontinuidad de 0.10 m— es de 15 y la resistencia de la misma discontinuidad es de 70 MPa. El peso unitario de la roca es de 24 kN m^{-3}.

3.5. ¿Cuál es la resistencia a corte de un plano sedimentario, cuya dimensión mayor es de 15 m, cuando por ésta actúa un esfuerzo normal $\sigma_n = 10$ MPa? El valor del ángulo de fricción básica de este plano es de 15 °, su coeficiente de rugosidad para una longitud de 0.10 m es igual a 8, y su resistencia a compresión normal a la junta de 50 MPa.

3.6. Una vía tiene una orientación con el norte geográfico de 25 hacia el Este. El ancho de la vía —con los dos carriles, fajas de reposo y canales— es de 8.0 m. El talud de la izquierda tiene 10 m de altura y una inclinación de 80°; luego de este se tiene una planicie.



(a) vista en planta (b) corte A-A

Figura 3.22 Esquema de la ubicación de la tubería respecto los taludes (Problema 3.4).

Al frente de este, en el talud de la derecha se tiene un corte compuesto: la primera parte del talud desde la base de la vía tiene una altura de 6.0 m y una inclinación de 50°; y luego éste baja en pendiente a una inclinación de 35°con una altura de 4.0 m hasta alcanzar la planicie (Figura 3.23).

Se tiene cuatro familias de discontinuidades totalmente persistentes. En el talud de la izquierda prevalece una familia cuya orientación es 115/80; mientras que en el talud de la derecha, prevalecen las siguientes familias de discontinuidades: 245/20, 345/30 y 220/25.

Se solicita que se verifique:

- los dos tipos de fallas por volteo en el talud de la izquierda con la familia 115/80;
- la falla por cuña con las familias 245/20 y 345/30; y
- la falla plana con la familia 220/25.

El ángulo de fricción de todas las familias de discontinuidades, a excepción de la familia 115/80, tienen las siguientes propiedades: ángulo de fricción básica de 18°y ángulo de dilatancia de 7°. Para la familia 115/80, el ángulo de fricción total es de 40°.

3.7. Un macizo rocoso tiene tiene tres familias de discontinuidades totalmente persistentes con orientaciones de 020/60, 130/40 y 080/20; donde el ángulo de ficción de las discontinuidades de las tres familias es de 25 °. Por ese macizo rocoso se desea pasar una tramo recto de vía, con una sección trasversal de tipo cajón en corte; donde ambos cortes tendrán una inclinación de 80 °y una altura de 25 m.

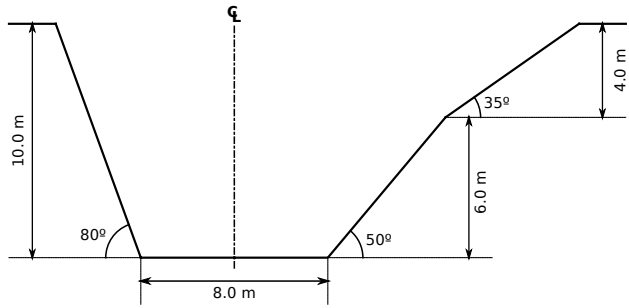


Figura 3.23 Esquema del corte de la vía (Problema 3.6).

Se sabe que en cualquier dirección que se oriente la vía existirá falla por cuña, pero existen algunas intervalos de la dirección de la vía donde no existirá falla plana por ninguno de los tres planos. Por tanto, por el método cinemático, determine los posibles intervalos de la dirección de la vía (*i.e.* azimut de vía) para que no se presente falla plana.

3.8. Se quiere analizar la estabilidad de un talud de 60 °de inclinación y 42 m de altura. Para ello, se desea calcular el factor de seguridad al deslizamiento de éste sabiendo que el macizo rocoso donde está el mismo tiene una discontinuidad persistente que parte desde su la pata, y que tiene un rumbo de buzamiento igual a la dirección de la cara del talud pero buzamiento de 45 °. El ángulo de fricción básica ϕ_b es igual a 20 °, el coeficiente fractal de la ondulación de la discontinuidad es de 0.17 y resistencia de las paredes de la discontinuidad de 80 MN m^{-2}. El peso unitario del material rocoso es de 0.027 MN m^{-3}.

3.9. Un macizo rocoso tiene un material cuyas propiedades son: peso unitario 0.026 MN m^{-3}, resistencia a compresión uniaxial 60 MPa, resistencia a tracción uniaxial -8 MPa. Además, este macizo tiene dos familias de discontinuidades totalmente persistentes con orientaciones de 220/60 y 130/40, donde el ángulo de fricción de las discontinuidades de ambas familias es de 30 °. Por ese macizo rocoso se desea pasar un tramo recto de vía, con una sección transversal de tipo cajón en corte; donde ambos cortes tendrán una inclinación de 75 ° y altura de 25 m. Por el método cinemático, determine los posibles intervalos de la dirección de la vía (*i.e.* azimut de la vía) para que no se presente ni falla plana ni falla por cuña.

3.10. Un macizo rocoso tiene un material cuyas propiedades son: peso unitario 27 kN m^{-3}, resistencia a compresión uniaxial 95 MPa, resistencia a tracción uniaxial -15 MPa. El mismo macizo rocoso tiene una familia de discontinuidades totalmente persistentes que está orientada a 280\80 y espaciadas a 0.8 m; además, estas discontinuidades tienen propiedades de resistencia también según el criterio MC de ϕ_d igual a 28 ° y cohesión c_d nula. Un gasoducto pasará por aquel macizo con una dirección hacia el norte y pendiente -20 °. Se

prevé cortes tipo cajón con taludes inclinados en una relación $H : V$ de $1 : 2.5$ y alturas máximas para el tramo de 18 m. Verifique si existe la posibilidad que se presente falla por volteo en las condiciones más desfavorables.

3.11. ¿Cuál es la resistencia a corte de un plano de contacto que es propenso a generar falla plana, cuya mayor dimensión longitudinal es de 3.2 m; cuando por ésta actúa un esfuerzo normal $\sigma_n = 7\,\text{MPa}$? El valor del ángulo de fricción básica de este plano es de 13 °, el coeficiente de rugosidad (Jrc) para una longitud de 0.10 m es igual a 5, y su resistencia a compresión normal a la junta (Jcs) es de 40 MPa.

3.12. En el siguiente esquema (Figura 3.24) se tiente la trayectoria de la caída de un bloque de roca, que tienen una forma irregular con un tensor de momentos ($\mathrm{I_m}$) y masa m. Observe que en el esquema existen círculos dentro de los cuales se tienen que llenar los números que le correspondería a la descripción de los puntos de la siguiente lista.

1. Zona de depósito de rocas caídas.
2. Punto donde existe una pérdida de energía cinética por choque.
3. Zona en la fuente que genera caída de rocas.
4. Macizo rocoso con al menos dos familias de discontinuidades.
5. Punto donde la roca se desprende.
6. Punto donde la roca puede adquirir —además de la velocidad lineal— velocidad angular.
7. Punto donde la roca ya adquirió velocidad lineal.
8. Tramo donde la roca rueda.
9. La roca cae de forma libre.
10. Punto donde la roca vuelve a adquirir velocidad lineal.
11. Tramo donde la roca se desliza.
12. La roca pierde velocidad angular y velocidad lineal.
13. Tramo donde el aire le da a la roca cierta resistencia a su movimiento.
14. Punto donde la roca ya no se mueve más.
15. Superficie del terreno.

3.13. ¿Cuál es la pérdida de energía de un bloque de roca esférico de masa igual a 2 kg que cae de un corte vertical (y en dirección vertical) desde una altura de 6 m? —Si se sabe que la superficie del terreno donde la roca rebotará tiene una inclinación con la horizontal de 30 °, y los coeficientes de restitución roca *v.s.* superficie tangencial y normal son 0.8 y 0.9, respectivamente. La expresión de la energía potencial es $E_p = 9.81mh$, en unidades del sistema internacional.

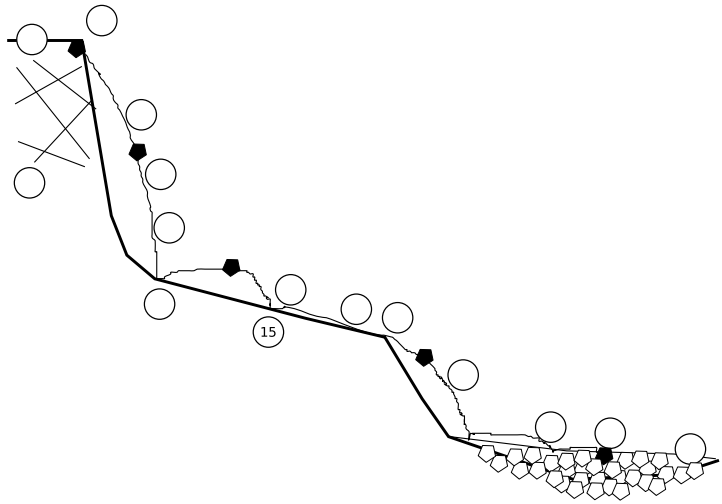


Figura 3.24 Esquema de los posibles puntos de caída en un talud y cinemática de un bloque de roca (Problema 3.12).

Capítulo 4
Análisis probabilista

En lo cotidiano de la ingeniería, los análisis de estabilidad de taludes se hace con el método de equilibrio límite para obtener el factor de seguridad contra el deslizamiento. Si el talud tiene un factor de seguridad mayor a 1 se espera que el mismo sea estable, mientras que si el talud tiene un factor de seguridad menor o igual a 1 se espera que éste sea inestable.

Se asume un *análisis determinista* cuando se tiene como respuesta un sólo factor de seguridad, que es resultado de dar también un solo valor a cada una de las variables de entrada del modelo. Sin embargo, se reconoce que existen muchas incertidumbres en la estimación de las variables de entrada de estos modelos. La variabilidad y la incertidumbre de los parámetros de la resistencia a corte del material se deben a la variación del suelo en el espacio, y a los diferentes sesgos y propagación de errores que se pudieron haber producido en su determinación a través de los ensayos de campo y ensayos de laboratorio, así como a las consideraciones de la escala del problema analizado. Por ejemplo, los niveles de las aguas subterráneas tienen una variación espacial y una variación temporal.

Todas estas incertidumbres y variabilidades atentan contra el concepto de precisión del valor del factor de seguridad, aún cuando el modelo analítico–numérico tenga todas las consideraciones físicas válidas y completas para representar el modelo. Es por estas razones que se observa que algunos taludes con un factor de seguridad de por ejemplo 0.9 no se rompen todavía, y otro con un factor de seguridad calculado de 1.1 si se rompe.

En las normas se establecen valores del factor de seguridad de diseño de 1.2 y 1.5 como valores para dar al ingeniero un *colchón* conservador contra toda esta incertidumbre y variabilidad.

Un análisis probabilista da por el contrario una estimación de la probabilidad de la ruptura de un talud, en vez de un factor de seguridad. En este tipo de análisis se asume que el factor de seguridad es una variable estocástica con una cierta función de distribución de probabilidades, que define si un talud se rompe o no bajo una probabilidad de ruptura dada por

$$P_{\mathrm{f}} = P[f_{\mathrm{s}} \leq 1]. \tag{4.1}$$

La principal ventaja de un análisis probabilista es que toma en cuenta de forma lógica y sistemática la incertidumbre y la variabilidad de todas las variables que intervienen en el análisis.

Los métodos comunes de análisis probabilista usados en el factor de seguridad al deslizamiento son:

- el método de las series de aproximación de Taylor;
- la método o la simulación de Montecarlo (MC);
- el método de las estimaciones puntuales, o también llamado método de Rosenblueth;
- el método de la estimación cruzada.

En este texto se verá la aplicación del MC; que es útil cuando se desea modelar un atributo que no necesariamente es adquirido, ensayado o medido (como es el caso del factor de seguridad); pero que pueda expresarse como una función matemática de otras propiedades que sí pueden ser adquiridas, ensayadas o medidas (como el caso de las variables que intervienen en los modelos de equilibrio límite).

El algoritmo del método tiene una estructura sencilla. Como regla se elabora primero un programa para la realización de una prueba aleatoria, y luego la prueba se repite n veces de modo que cada experimento sea independiente de los restantes. Se toma por lo general la media de los resultados de todos los experimentos. Por esta razón el método se denomina también como *método de pruebas aleatorias*.

Sin embargo, el método no tiene elevada exactitud, y los errores son del orden del 5 % al 10 %.

4.1. Aplicaciones generales del MC

Con el método de Monte Carlo se puede resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias [73]. A continuación se verá tres ejemplos generales del MC.

Ejercicio 4.1. Integrar la función matemática $g(x) = x^2$ entre los límites $a = 5.4$ y $b = 1.2$ usando el análisis matemático y luego usando el MC.

Solución 4.1. Por las reglas de análisis matemático la integral de $g(x)$ es

$$\int_a^b g(x) = \frac{1}{3}x^3 \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{3}(1.2)^3 - \frac{1}{3}(5.4)^3 = -47.280.$$

Para resolver la misma integral por el MC se asume una distribución uniforme, que tiene la siguiente expresión:

$$f(z) = U[c,d] = \begin{cases} \frac{1}{c-d} & \text{si } c \leq z \leq d; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego se generan alrededor n variables aleatorias de z entre los valores $c = 0$ y $d = 1$ controladas por la función de distribución escogida. Cada variable aleatoria z se transforma a x tomando en cuenta los límites de a y b con

$$x = z(b-a) + a$$

y se evalúa para cada una de ellas en la función $g(x)$.

La integral buscada entre los límites a y b es

$$\int_a^b g(x) = \frac{\sum g(x)}{n} \frac{g(b-a)}{(b-a)}.$$

Para el caso de este ejemplo se generaron exactamente $n = 8090$ variables aleatorias, y $\sum g(x) = 131468,9$, $(b-a) = -2.9$ y $g(b-a) = 8.41$, dando un valor de la integral buscada entre esos límites de -47.314.

El error cuadrado con la solución analítica es

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{(v_r - v_c)^2}{v_r}},$$

donde v_r es el valor real y v_c es el valor calculado; que para el caso del presente ejercicio da igual a $0.07\,\%$.

Para obtener mejores resultados se debe aumentar el número de n hasta el nivel deseado de exactitud. En cada simulación, inclusive con el mismo número de variables aleatorias el resultado es distinto, debido a que cada simulación generará distintos valores aleatorios.

□

Ejercicio 4.2. Integrar la función matemática $g(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ entre los límites $a = 2$ y $b = 20$ usando el análisis matemático y luego usando el MC.

Solución 4.2.

$$\int_a^b g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \log x \Big|_a^b = 2661.11.$$

Con $n = 8090$ y una distribución uniforme se obtuvo $\sum g(x) = 145.760$, $(b-a) = 18$ y $g(b-a) = 323.94$; por tanto un valor para la integral de 2623.237 y un error de $1.4\,\%$. □

En los anteriores dos ejemplos, se usó el MC para solucionar un problema que no tiene nada que ver con variables aleatorias; situación que a veces no se cree que es posible, y se tiene el falso presentimiento que el MC se usa únicamente para solucionar problemas que desde ya tienen variables con una cierta aleatoriedad involucrada.

Ejercicio 4.3. Calcule el área de la dovela que se muestra en la Figura 4.1 por medios analíticos y por el método MC. El ancho de la dovela b es 0.4 m, su altura h de 0.6 m y los ángulos de los lados inclinados superior β e inferior α iguales a 30°y 12°, respectivamente.

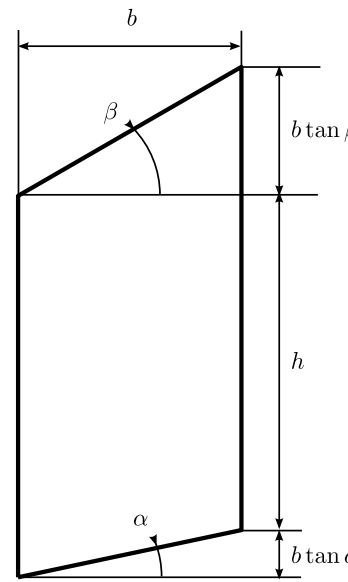


Figura 4.1 Variables necesarias para definir una dovela y calcular su área.

Solución 4.3. Por expresiones analíticas el área de una dovela está dada por la siguiente expresión

$$A_{\mathrm{r}} = hb + \frac{1}{2}b^2\left(\tan\alpha + \tan\beta\right).$$

Sustituyendo los valores indicados se tiene que $A_{\mathrm{r}} = 0.3032\,\mathrm{m}^2$.

Usando el método de MC se crea un área de trabajo rectangular cualquiera A_{t} donde quepa la figura geométrica a calcular. En este caso en particular resulta fácil y es posible definir un área cuadrada de $1\,\mathrm{m}^2$, debido que la figura entra dentro de ella.

Se generan $n = 1\,000$ posiciones aleatorias en el plano que estén limitadas por los bordes del área de trabajo. Esto es posible simular generando números aleatorios para la posición `x` y `y` por separado y unirlos para formar un vector de posición. La Figura 4.2 muestra las posiciones aleatorias de este ejemplo.

Se cuenta aquellos puntos que hayan caído dentro del área n_{in} y se obtiene el área de la figura geométrica mediante la siguiente expresión:

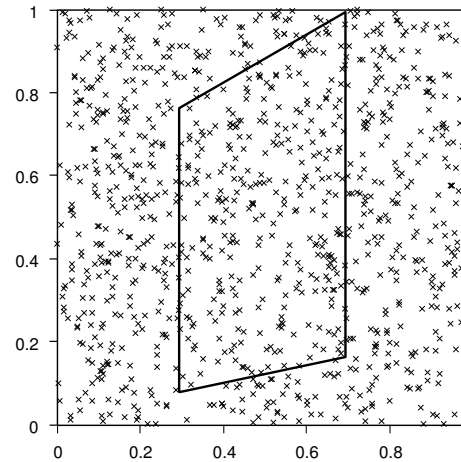


Figura 4.2 Figura geométrica *bombardeada* por 1000 puntos aleatorios en un área de trabajo cuadrada de 1 m^2.

$$A_c = A_t \frac{n_{in}}{n}$$

Para el caso del ejemplo, se encontró que $n_{in} = 301$; por tanto el área por el método da igual a $A_c = 0.301$.

En realidad se puede calcular el área de cualquier figura con este método, inclusive un contorno cóncavo y con trazos curvos. □

El error de la solución del método es proporcional a la magnitud $\sqrt{\frac{d}{n}}$, donde d es una constante; lo cual permite ver que para disminuir el error en 10 veces —para obtener en el resultado otra cifra decimal exacta— es preciso aumentar n en 100 veces [73].

4.2. Aplicaciones del MC a la estabilidad de taludes

El objeto de usar el MC en la estabilidad de taludes es el de obtener una probabilidad de ruptura al deslizamiento del modelo que se esté usando. El caso más sencillo que se explotará será el caso de la estabilidad de un talud infinito en ruptura plana (Ec. 2.28), debido a la sencillez de la ecuación del modelo que no necesita una solución numérica para resolverlo. Sin embargo el mismo criterio se hace extensible a cualquier modelo de estabilidad de taludes, como los que se verá más adelante.

De este modo, toda variable de entrada del modelo se convierte en una variable estocástica regida por alguna función de densidad de probabilidades (PDF de las siglas del Inglés de *Probability Density Function*), sea paramétrica o no.

En este caso particular se usará funciones PDF paramétricas sencillas univariadas para la mayoría de las variables que intervienen en el modelo de la Ec. 2.28; y que fueron usadas en este tipo de modelo de talud [32]; tales como:

- rectangular u homogénea acotada entre los valores a y b, $U[a,b]$;
- triangular acotada entre los valores a y c, y con el valor más probable en b, $T[a,b,c]$;
- normal no-acotada, $N[\bar{x},s]$;
- lognormal no-acotada $L[\bar{x},s]$;
- beta acotada entre los valores a y b, y dos parámetros de forma p y q, $B[a,b,p,q]$.

Sólo para el caso de las variables que definen la resistencia última del suelo (*i.e.* variables ϕ y c) se aconseja usar una función normal bivariada no-truncada($BN[\bar{x},s_x,\bar{y},s_y,r]$); que en general puede ser una del tipo normal. Esta función tiene los dos parámetros para cada variable $\bar{x}$, s_x, $\bar{y}$, s_y, más el coeficiente de correlación entre ambas (r). También, para las variables ϕ y c es aceptable usar una función univariada por cada uno de estos parámetros, esto si no se tiene suficientes datos como para establecer la correlación entre las dos variables.

En el caso de tener suficientes datos y no se desea trabajar con una función de distribución paramétrica, se puede usar el *histograma muestral* para generar los valores estocásticos.

4.2.1. Distribución uniforme

Es la función más importante de la estadística, porque a partir de esta se genera los número aleatorios y de estos se genera todas las demás funciones PDF; sin embargo, es la más difícil de generar con exactitud porque trata de representar la situación donde todos los números reales tienen la misma probabilidad de suceder en un evento. Por lo normal, la distribución uniforme se genera entre el intervalo $[0,1]$.

En la disciplina de las matemáticas que estudia el análisis numérico se está desarrollando algoritmos para generar números aleatorios lo más exactos posibles. Muchos de estos algoritmos se auxilian del hardware que los computadores tienen para generar números aleatorios.

La expresión de la PDF de la distribución uniforme acotada entre a y b es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{para } a \leq x \leq b. \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \tag{4.2}$$

El valor esperado es

$$\mathrm{E}[x] = \frac{a+b}{2}; \tag{4.3}$$

y la varianza es

$$\mathrm{Var}[x] = \left(\frac{b-a}{\sqrt{12}}\right)^2. \tag{4.4}$$

Si $f(x)$ se integra de a a b, se tiene que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{x}{b-a}\right|_a^b \\ &= \frac{b-a}{b-a} \\ F(x) &= 1; \end{aligned}$$

lo que indica que para cualquier valor entre a y b, inclusives, la probabilidad de ocurrencia es igual para todos e igual al 100 %.

4.2.2. Distribución triangular

La función de distribución triangular no simétrica —dada por un límite inferior de valor a, un límite superior de valor c, y otro valor de b en el valor más esperado— está dada según la siguiente ecuación

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)}, & \text{para } a \leq x \leq b. \\ \frac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)}, & \text{para } b < x \leq c. \end{cases} \tag{4.5}$$

En el caso particular que se desee la expresión de la función de distribución triangular simétrica con valores que varían entre $[0,1]$ entonces $a = 0$, $c = 1$ y $b = 0.5$, y la expresión de la Eq. 4.5 se reduce a

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \\ 4(1-x), & \text{para } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

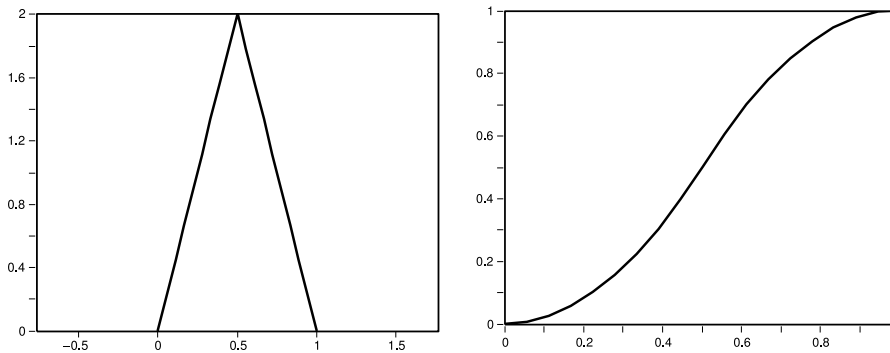
Para obtener la función de probabilidades acumulada, se integra la función $f(x)$ entre los intervalos de validez. La primera línea de la función de la Ec. 4.6 tiene la expresión analítica $f(x) = 4x$, y la segunda línea la expresión $f(x) = 4 - 4x$; por tanto

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^x 4x\,\mathrm{d}x; & \text{para } 0 \le x \le \frac{1}{2}. \\ \int_{\frac{1}{2}}^x 4(1-x)\,\mathrm{d}x; & \text{para } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

que finalmente resulta en

$$F(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{para } 0 \le x \le \frac{1}{2}. \\ -2x^2 + 4x - 1, & \text{para } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Esto indica que la función acumulada de probabilidades buscada es una compuesta por dos funciones parabólicas, tal como se muestra en la Figura 4.3.



(a) función de densidad $f(x)$ (b) función acumulada $F(x)$

Figura 4.3 Función de distribución de probabilidades triangular simétrica en los límites $[0,1]$.

Para generar números aleatorios regidos por la distribución triangular, y en general para la mayoría de las funciones de distribución continuas, se recurre a un método efectivo que se denomina el *método de la inversa* que se basa en el siguiente teorema:

Theorem 4.1. *Sea F una función de distribuciones continua en $\mathbb{R}$ con una inversa F^{-1} definida esta última por*

$$F^{-1} = \inf\{x : F(x) = u, 0 < u < 1\};$$

si U es una función de distribuciones uniforme $[0,1]$, entonces $F^{-1}(U)$ tiene una función de distribución F. Asimismo, si X tiene una distribución F, entonces $F(X)$ es uniformemente distribuida en $[0,1]$ [16].

En casi todas las funciones de distribución paramétricas continuas la inversa no es una expresión analítica cerrada; pero en el caso de la distribución triangular sí existe una. Esta función inversa se obtiene de despejar x de la expresión 4.6 para nuestro caso especial; y obtener:

$$x = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{F(x)}, & \text{para } 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2}. \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-F(x)}, & \text{para } \frac{1}{2} < F(x) \leq 1. \end{cases} \tag{4.8}$$

Ahora simplemente le damos los nombres apropiados a la función, decir que $x = F^{-1}(U)$ y que $F(x) = U$ resultando la expresión de la Ec. 4.32 igual a

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{U}, & \text{para } 0 \leq U \leq \frac{1}{2}. \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-U}, & \text{para } \frac{1}{2} < U \leq 1. \end{cases} \tag{4.9}$$

Por ejemplo, para una probabilidad de 0.3 el valor de $F^{-1}(U)$ es 0.39, y para una probabilidad de 0.8 el valor es de 0.68. A la función $F^{-1}(U)$ se la llama *función cuantil* (*i.e. percent point function*).

La función en MATLAB® que se creó para generar números aleatorios bajo la anterior distribución de probabilidades es la `isimmtriangcdf`. Con esta función se generaron 3 000 datos. El histograma resultante de la generación de esa cantidad de datos se muestra en la Figura 4.4, donde se observa que se acerca mucho a la densidad de distribución triangular que se deseaba encontrar.

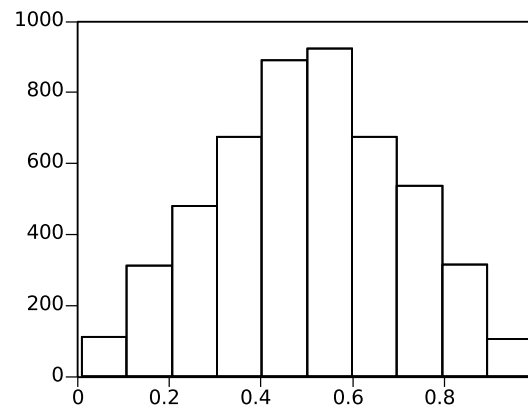


Figura 4.4 Histograma resultado de la generación de 3 000 números aleatorios bajo una pdf triangular simétrica de límites $[0, 1]$.

4.2.3. Distribución normal

La distribución normal está definida como

$$f(x) = \frac{\exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{para } -\infty < x < \infty. \tag{4.10}$$

La operación inversa de $F^{-1}(U)$ no tiene solución analítica cerrada como el caso de la distribución normal, pero ella puede aproximare mediante una serie.

4.2.4. Distribución lognormal

Es una distribución normal de u que representa el cambio de variable de x a $u = \lg x$.

4.2.5. Distribución beta

Es una distribución de cinco parámetros, con uno de ellos dependiente de las otras: dos que acotan la distribución entre los límites inferior y superior respectivamente a y b; otros dos (p y q) que son los parámetros de forma, y el quinto (k, el parámetro de escala) que depende de los dos parámetros de forma.

La ventaja de esta función es que existen valores mínimo y máximo y no tienden al infinito como la distribución normal y la lognormal; además que puede tener una variedad de formas que se obtiene de sólo modificar los parámetros p y q; de este modo, la distribución beta es una familia de distribuciones de probabilidades. La expresión de la distribución es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \left[\frac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}}\right], & \text{para } a \le x \le b \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}; \tag{4.11}$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función gamma dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} \exp^{-\alpha} \mathrm{d}u = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1). \tag{4.12}$$

Si α es cero o un entero positivo $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$.

Existen representaciones para la solución de la función $\Gamma(\alpha)$: la de Euler, la del producto de Weierstrass y la expansión de Stirling (Vea [46]).

La relación $\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$ es el recíproco de la función beta $B(p,q)$, donde esta última también se define como

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,\mathrm{d}u. \tag{4.13}$$

Los parámetros de forma p y q definen tres características intuitivas de la respuesta de la forma, que son las siguientes.

1. La localización del valor máximo con respecto de los extremos a y b por $\frac{pb+qa}{p+q}$; si $p=q$ la localización del máximo está en $\frac{1}{2}(a+b)$.
2. El sesgo (*i.e. skewness*) de la respuesta, que se define por la relación $r_{\mathrm{pq}} = \frac{p}{q}$; mientras mayor es la diferencia entre p y q mayor es la asimetría, mayor es el sesgo; y en el caso especial cuando $p=q$, la respuesta es simétrica.
3. La curtosis[1] (*i.e. kurtosis*) de la respuesta, que se describe por los valores absolutos de los parámetros p y q.

La Figura 4.5 muestra varias formas de funciones que se pueden obtener con tan solo modificar los parámetros p y q de forma de la función beta.

Observe que cada una de las filas tiene un mismo valor de p y cada una de las columnas un mismo valor de q; de este modo, en la diagonal se tiene los pdf de la distribución beta para $p=q$ que son simétricas y no tienen sesgo a ninguno de los lados. La única diferencia entre estos valores de la diagonal es que mientras mayor sea $p=q$ la curtosis es mayor.

También se observa que si $q<p$ (*i.e.* $r_{\mathrm{pq}}<1$) se tiene un sesgo hacia los valores inferiores (*i.e.* las gráficas ubicadas en el triángulo por encima de la diagonal); mientras que si $q<p$ el sesgo es hacia los valores superiores (*i.e.* las gráficas ubicadas en el triángulo por debajo de la diagonal).

Asimismo, si $r_{\mathrm{pq}}<1$ y mientras menor lo es, mayor son las frecuencias hacia el lado de valores inferiores; y si $r_{\mathrm{pq}}>1$ y mientras mayor lo es, menor son las frecuencias hacia el lado de valores superiores.

Los parámetros de forma no se pueden dar de forma arbitraria, ellos dependen de los valores extremos a y b . Si a y b se prefijan y son constates, el sesgo y la localización del valor más probable ya no se podrían definir de forma independiente [58].

La función de distribución beta estándar es aquella donde los valores extremos a y b son de forma respectiva iguales a 1 y 0. Esto torna a la función en una más sencilla que la de la Ec. 4.11, que sería

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}; \tag{4.14}$$

[1] Curtosis: una mayor curtosis implica una mayor concentración de datos muy cerca de la media de la distribución coexistiendo al mismo tiempo con una relativamente elevada frecuencia de datos muy alejados de la misma.

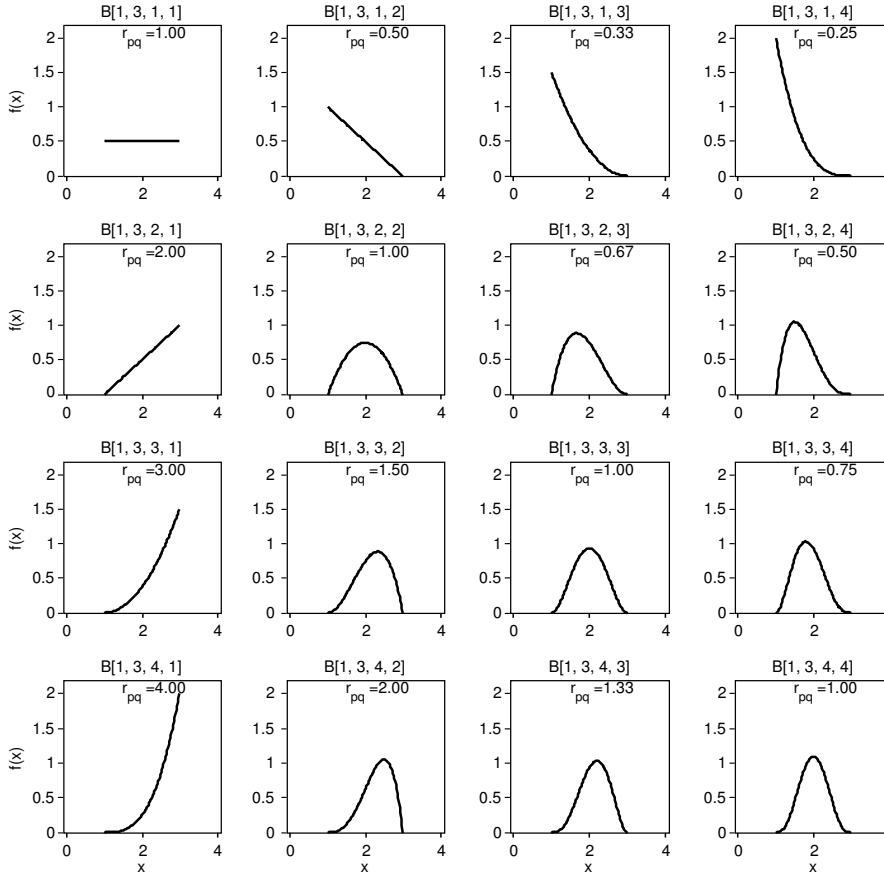


Figura 4.5 Diferentes formas de funciones que se pueden obtener con tan solo modificar los parámetros p y q de forma de la función beta, para cualquiera de los valores a y b.

con $p > 0$ y $q > 0$.

La mayoría de los lenguajes de programación resuelven la función beta estándar, como lo es en el caso de MATLAB®. Sin embargo, toda distribución puede expresarse en términos de su homóloga estándar, tras modificar su localización con a y su escala con $b-a$.

Para las funciones que por ahora interesan: la función de densidad de probabilidades acotada entre a y b es igual a la $(b-a)$-enésima parte la misma función estándar de una variable $u = \frac{x-a}{b-a}$; es decir

$$f(x;a,b) = \frac{1}{b-a} f(u;0,1). \tag{4.15}$$

Del mismo modo, para la función de distribución acumulada

$$F(x;a,b) = F(u;0,1). \tag{4.16}$$

Finalmente, para la función cuantíl (*i.e.* función de punto percentil, de la traducción directa del inglés de *percent point function*)

$$F^{-1}(x;a,b) = a + (b-a)\, F^{-1}(x;0,1). \tag{4.17}$$

Para la generación de número aleatorios, ya se vio que $Y(a,b) = a + (b-a)\, Y(0,1)$.

Con la evaluación de la función beta estándar con u, el promedio y la desviación estándar de los valores de x son respectivamente

$$\bar{x} = a + (b-a)\,\bar{\beta}, \tag{4.18}$$

$$\sigma^2(x) = (b-a)^2\,\sigma_\beta^2; \tag{4.19}$$

donde $\bar{\beta}$ y σ_β^2 son de forma respectiva: el promedio y la varianza de la distribución beta estándar con parámetros p y q, dados por

$$\bar{\beta} = \frac{p}{p+q}, \tag{4.20}$$

y

$$\sigma_\beta^2 = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2}. \tag{4.21}$$

4.2.5.1. Distribución de frecuencias del histograma

El primer paso para elegir una apropiada función de distribución de probabilidades a una variable es el de crear un histograma, o un *histograma de frecuencias relativas*; este último es un histograma donde no se reporta el número de repeticiones de datos que caen en cada intervalo, sino que se muestra la proporción (en tanto por uno, o en tanto por ciento) de los valores que caen en cada intervalo respecto el total de valores analizados.

El histograma puede tener diversas formas para un mismo conjunto de medidas, todo depende de el número de clases que se escoja para su representación. Si se tiene muy pocas clases se pierde los detalles de la distribución de los datos; mientras que si se tiene muchos intervalos el histograma parecerá *errático*, inclusive con algunas clases con ninguna frecuencia reportada.

Para evitar grandes contrastes por la posible mala definición en defecto o en exceso de las clases, en estadística se hace empleo de la *regla de Sturges* [76]; que dicta que el posible

ideal número de intervalos (k) de un conjunto de datos (n) es

$$k = 1 + 3.3 \lg n. \tag{4.22}$$

Por otro lado, es importante que cada clase en el histograma necesariamente tenga el mismo ancho de intervalo, esto garantiza que la suma de las áreas de todas las clases da igual a uno o a cien para el caso del histograma de frecuencias relativas; de otro modo, el histograma estaría mal representado y no mostraría un *histograma experimental* verdadero. En caso de tener un histograma con clases de ancho de intervalo variable se divide el ancho de cada clase por su frecuencia, dando lugar a una *distribución de densidad de frecuencias*.

Tanto el histograma de frecuencias total como el de frecuencias relativas dan buena información acerca de la concentración, distribución y valores más frecuentes de los datos, así como características de la simetría de los datos respecto a un valor medio.

Es posible hacer modelaciones Montecarlo a partir de los histogramas experimentales; para ello se tiene que usar todos los datos que conforma el histograma y se tiene que calcular la *distribución de densidad de frecuencias* a partir del *histograma de frecuencias*, sea este de frecuencias totales o de frecuencias relativas.

La forma de nombrar simbólicamente un *histograma de frecuencias totales* es

$$H(x_1, m) = \{f_{t1}, f_{t2}, \ldots, f_{ti}, \ldots, f_{tk}\}; \tag{4.23}$$

donde x_1 es el punto central del primer intervalo, m representa el ancho constante de los intervalos, k es el número total de intervalos, y f_{ti} es el valor de las frecuencias totales por cada intervalo i. En este caso, el número total de medidas que origina el histograma (n) es

$$n = \sum_{i=1}^{k} f_{ti}. \tag{4.24}$$

El valor esperado de un histograma de frecuencias totales es

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_{ti} x_i; \tag{4.25}$$

donde x_i es el punto central del intervalo i igual a

$$x_i = x_1 + m(i-1). \tag{4.26}$$

Asimismo, la varianza de un histograma de frecuencias totales es

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{k} f_{ti} x_i^2 - \frac{\bar{x}^2}{n} \right]. \tag{4.27}$$

Con la función `histfromtotfreqsvec` uno puede generar el histograma a partir de esta representación, y además puede obtener los valores del valor esperado y la varianza.

Si se va a nombrar un *histograma de frecuencias relativas*, la forma es

$$H(x_1, m, n) = \{f_{\mathrm{r}1}, f_{\mathrm{r}2}, \ldots, f_{\mathrm{t}i}, \ldots, f_{\mathrm{r}k}\}; \tag{4.28}$$

donde se añade la información de n; y en este caso, $f_{\mathrm{r}i}$ es el valor de las frecuencias relativas por cada intervalo, que es igual a la relación del número de medidas n_i que contiene cada intervalo i respecto al número total de medidas.

$$f_{\mathrm{r}i} = \frac{n_i}{n}; \tag{4.29}$$

donde por definición $n_i \equiv f_{\mathrm{t}i}$.

Ejercicio 4.4. Encuentre las expresiones del valor esperado y la varianza que se usa cuando los datos son representados por un histograma de frecuencias relativas.

Solución 4.4. Partimos de la definición que $\frac{f_{\mathrm{t}i}}{n} \equiv f_{\mathrm{r}i}$ y reemplazamos en las expresiones de la Eq. 4.25 para obtener que el valor esperado de los datos representados a partir de un histograma de frecuencias relativas;, que es

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} (f_{\mathrm{r}i}\, x_i).$$

De la misma definición y con la expresión de la Eq. 4.27 se encuentra que la varianza de los datos representados a partir de un histograma de frecuencias relativas es

$$\sigma_x^2 = \frac{n}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} \left(f_{\mathrm{r}i}\, x_i^2\right) - \frac{\bar{x}^2}{n^2}\right].$$

Observe que la expresión de la varianza es aún dependiente del número de datos totales (n) que ha creado el histograma; por tanto, es imperante que todo histograma relativo lleve consigo la información del número total de datos a partir del cual se ha generado. Este aspecto muchas veces es ignorado, y la presentación de un histograma relativo sin n es incompleto e inservible. □

Con una función similar al caso de los histogramas de frecuencias totales, con la función `histfromrelfreqsvec` uno puede generar el histograma a partir de valores de frecuencias relativas, y además puede obtener los valores del valor esperado y la varianza.

4.2.5.2. Función normal bivariada

La función de distribución de probabilidades normal bivariada es un caso especial bidimensional de la misma función multivariada. En el método MC aplicado para la estabilidad de suelos en ruptura plana infinita esta función se usa para correlacionar el ángulo de fricción interna con la cohesión, donde se evidenció que existe tal correlación.

4.3. El programa OpenLISA para ruptura plana

El programa OpenLISA es un conjunto de funciones procedimentales desarrollado por el autor de este libro en MATLAB® que tiene el fin de realizar el *análisis probabilista* de una *región geográfica* bajo un modelo de ruptura plana con la fórmula general del factor de seguridad global presentado en la Eq. 2.28.

Este programa es una versión multiplataforma en licencia abierta del programa LISA versión 2.0, este último desarrollado para el sistema operativo DOS por [32] para el Departamento de Agricultura de los E.E.U.U., un programa que tuvo gran uso en la década de los 90 del siglo pasado.

Para aprender a operar OpenLISA recurriremos al Ejercicio 4.5.

Ejercicio 4.5. El mapa geotécnico de la región Dark-3, cuya topografía se muestra en la Figura 4.6(a), se muestra en la Figura 4.6(b). Para esa región se solicita encontrar la probabilidad de ruptura a deslizamiento plano en tres puntos generados de forma aleatoria dentro de la región de análisis; para dos condiciones: en estado natural y en estado descubierto.

Los valores de las variables aleatorias necesarias para el cálculo en cada unidad temática geotécnica se muestra en el Cuadro 4.1; y para todas la unidades temáticas geotécnicas las siguientes variables son iguales:

- sobrecarga por la presencia de árboles (q_{ta}): $U[0.29, 0.57]$ [kPa];
- incremento de la cohesión por presencia de raíces (c_{r}) en estado natural, histograma dado por el conjunto

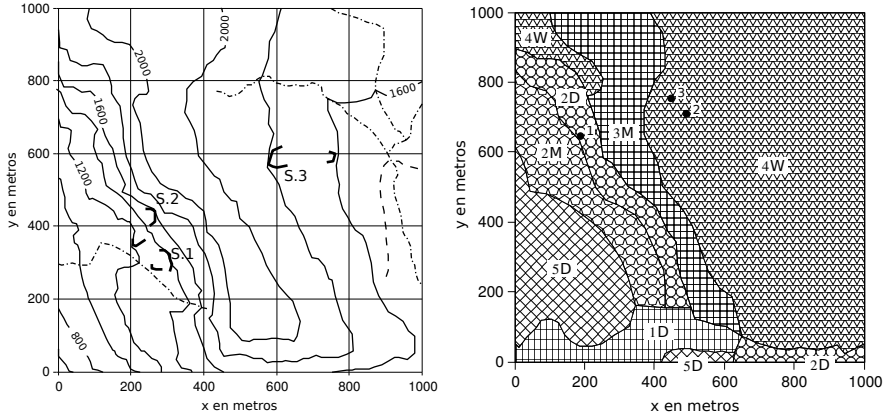
$$H(0.33, 0.33) = \{5, 20, 20, 20, 20, 10, 15\} \text{ [kPa]};$$

- incremento de la cohesión por presencia de raíces (c_{r}) en estado descubierto, histograma dado por el conjunto

$$H(0.19, 0.19) = \{5, 40, 45, 10\} \text{ [kPa]}.$$

El peso unitario saturado (γ_{sat}) tiene un función de distribución de probabilidades beta $B[15, 22, 3, 3]$ [kN m^{-3}]. Use como valor del peso unitario del agua 9.8 kN m^{-3}.

□



(a) Mapa de curvas de nivel. (b) Mapa geotécnico temático.

Figura 4.6 Mapas de la región Dark-3, E.E.U.U. (Basado y modificado de [32]).

Cuadro 4.1 Distribuciones usadas en el área de planificación Dark 3.

Unid.	d en m	β en °	c' en kPa	ϕ' en °	Relación m	
					con vegetación	descubierto
1D	$T[0.3,0.9,1.5]$	$T[65,75,90]$ / $T[70,85,90]$	$U[0.07,0.52]$	$U[31,38]$	$T[0.0,0.2,0.4]$	$T[0.0,0.2,0.5]$
1M					$T[0.0,0.2,0.5]$	$T[0.0,0.3,0.6]$
2D					$T[0.0,0.2,0.4]$	$T[0.0,0.2,0.5]$
2M					$T[0.0,0.2,0.5]$	$T[0.0,0.3,0.6]$
3M	$T[0.6,1.2,3.0]$	$T[20,30,70]$	$U[0.07,0.35]$	$U[34,42]$		
4W	$T[0.9,1.5,3.0]$	$U[20,50]$	$U[0.14,0.69]$	$U[28,38]$		$T[0.0,0.4,0.7]$
5D	$T[0.9,2.7,9.1]$	$T[40,50,90]$	$U[0.28,0.69]$	$U[32,38]$	$T[0.0,0.2,0.4]$	$T[0.0,0.3,0.5]$

Los nombres de las variables de los títulos de la tabla son: d, la profundidad del manto de suelo hasta la roca; β, la pendiente del talud; c', la cohesión drenada del suelo; ϕ', el ángulo de fricción interna en estado drenado del suelo; d_w, la profundidad desde la superficie freática que es paralela a la pendiente; $m = \frac{d_w}{d}$, la relación de la profundidad de la columna de agua con la profundidad de la superficie de ruptura.

Solución 4.5. Primero generamos dos coordenadas aleatorias que estén dentro de la región (redondeado a $\frac{5}{10}$ más cercano del número entero) con las oraciones

```
randCoordsArray =rand(3,2)*1000;
randCoordsArray =round( randCoordsArray/0.5 )*0.5;
```

El resultado que se obtuvo de esta generación se muestra en el Cuadro 4.2.

Se puede observar que los puntos P_2 y P_3 por azar están en la misma unidad temática geotécnica; por tanto, se analizará sólo uno de los dos y que por simplicidad de nomenclatura será el P_2. De este modo, es claro ver que el punto P_1 se encuentra en la unidad 2D y el punto P_2 en la unidad 4W.

Cuadro 4.2 Coordenadas de los puntos para analizar.

Punto	Coordenadas en m	
	Este	Norte
P_1	187.0	646.5
P_2	490.0	709.5
P_3	445.5	754.5

Los histogramas están presentados de forma absoluta. Cada histograma se puede almacenar en una variable que forma una estructura, como se muestra a continuación:

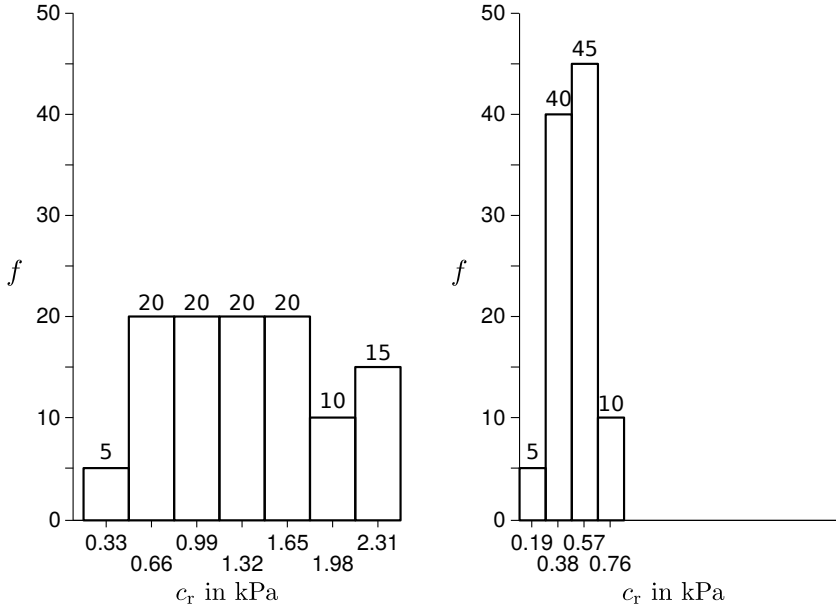
```
abshistogram1STR =struct( 'binIni', 0.33, 'classIntvlLgth', ...
    0.33, 'frequency', [5, 20, 20, 20, 20, 10, 15] );

abshistogram2STR =struct( 'binIni', 0.19, 'classIntvlLgth', ...
    0.19, 'frequency', [5 40 45 10] );
```

Cada histograma para el valor de c_r se puede dibujar independiente con la función `plothistofromfreqsvec`; pero muchas veces con fines de comparación es mejor dibujar con la escala en x igualmente espaciada. Por ejemplo, para el caso de los histogramas de c_r, es importante comparar los histogramas de ambas variables, tal como lo muestra la Figura 4.9. Para obtener estas figuras no se usó `plothistofromfreqsvec`; más bien, se ejecutó las siguientes oraciones

```
abshistogramSTRcell ={abshistogram1STR, abshistogram2STR};
[ xlimitsVec, ylimitsVec ] =commonlimitshists( abshistogramSTRcell );

figure( 'Color', ones(1,3) );

subplot(1,2,1), hold on
histfromtotfreqsvec( abshistogram1STR, 1, 'w' );
xlim( xlimitsVec ); ylim( ylimitsVec );
xlabel('c_r in kPa'); ylabel('f');
hold off

subplot(1,2,2), hold on
histfromtotfreqsvec( abshistogram2STR, 1, 'w' );
xlim( xlimitsVec ); ylim( ylimitsVec );
xlabel('c_r in kPa'); ylabel('f');
hold off
```

Analizaremos de forma detallada el punto P_1 dentro de la unidad geotécnica 2D, y con fines de obtener varios valores generados por el método de Montecarlo, generaremos 3000 números.

Este análisis lo haremos para una relación m cuando en la unidad se tiene la presencia de la vegetación. Por tanto, usaremos la distribución triangular de la columna bajo el rótulo *con vegetación* del Cuadro 4.1.



(a) Estado natural. (b) Descubierto.

Figura 4.7 Histogramas experimentales de c_r.

La profundidad de la superficie de ruptura d también es una distribución triangular; y también es otra función triangular la distribución que le corresponde a la inclinación del talud respecto la horizontal β dado en grados sexagesimales.

Las variables que definen la envolvente de ruptura (ϕ y c) y el peso unitario saturado del material (γ_{sat}) en la superficie de ruptura no están correlacionadas. Las funciones de distribución para ϕ y c son uniformes; y la función de distribución de γ_{sat} es una distribución beta.

La sobrecarga de peso por la presencia de los árboles es una función uniforme, y el incremento de la cohesión por presencia raíces para el caso bajo el rótulo *con vegetación* está dado por un histograma.

De este modo, tenemos ocho variables estadísticamente independientes con funciones de distribución de probabilidades bien definidas; que al tomar en cuenta cada uno de los 3000 eventos, observamos que los números generados para cada variable se acerca a sus definiciones.

Con los números generados para cada variable se evalúa también 3000 valores del factor de seguridad (f_s) y se obtiene un histograma (Figura 4.8). Con el histograma se puede obtener una función de densidad de probabilidades (Figura 4.9(a)) y una función acumulada

(Figura 4.9(b)). Con la función acumulada se calcula cuál puede ser la probabilidad de ruptura, si se divide el número de eventos que tienen factores de seguridad menores a la unidad respecto al número de eventos totales (*i.e.* 3000).

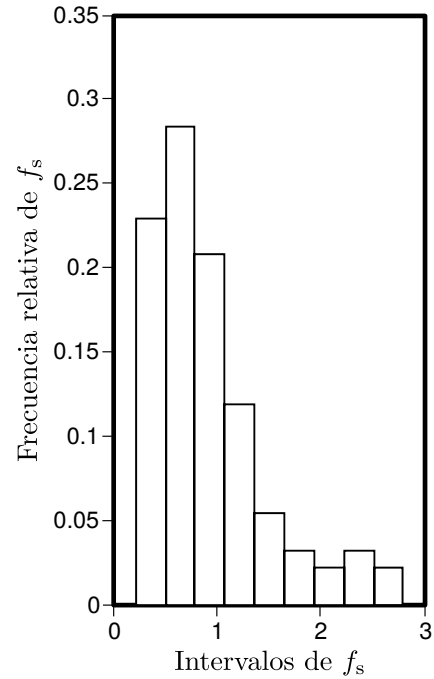


Figura 4.8 Histograma de los 3000 valores f_s modelados.

6

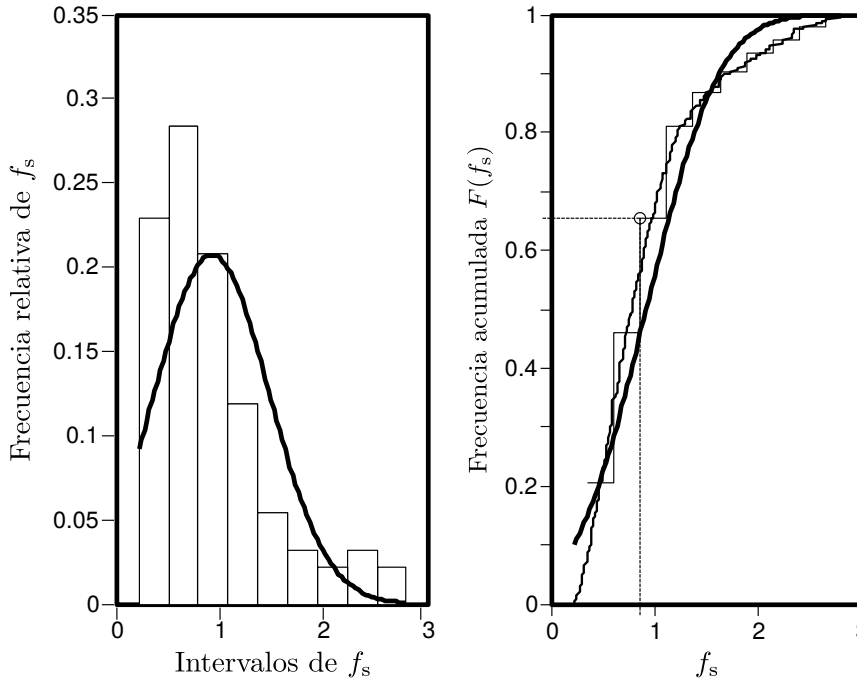
También si es posible, con el histograma se puede proponer una función de distribuciones paramétrica, que dará una mejor y completa descripción de la variabilidad de f_s con unos pocos parámetros. Para este caso, se logró proponer una función de distribución normal con los siguientes parámetros: promedio de 0.0.552 y desviación estándar de 0.925.

De la Figura 4.9(b) se puede deducir que la probabilidad de falla para $f_s = 1$ es de 66 %; asimismo, el valor esperado de todos los valores de f_s modelados es de 0.92.

El mismo procedimiento se hace para la misma unidad geotécnica, pero para el caso de que la superficie del terreno esté descubierta donde se usa funciones distintas para m y c_r. Asimismo, el mismo procedimiento se hace para el análisis del punto P_2 en la unidad geotécnica 4W para los dos casos de superficie del terreno con vegetación y descubierta.

Al final, se puede resumir todos estos análisis en el Cuadro 4.3.

□



(a) Función de densidad de probabilidades. (b) Función acumulada de probabilidades.

Figura 4.9 Funciones experimentales y teórico-paramétricas para f_s.

Cuadro 4.3 Resultados del análisis MC en el sitio Dark-3 con OpenLISA.

Punto	Unidad	Cond. Sup. terreno	Parámetros de la función beta				Prob. Ruptura
			a	*b*	*p*	*q*	
P_1	2D	con vegetación	0.4	1.3	3	4	0.65

Lista de ejercicios

4.1. Se decidió analizar la estabilidad al movimiento en masa de una área determinada bajo una aproximación probabilista y bajo el modelo de falla plana. Para ello se hizo apreciaciones heurísticas en el sitio y se determinó como factibles las siguientes funciones de distribución de probabilidades para los parámetros que intervienen el modelo:

- ángulo de fricción interna efectiva del suelo (ϕ'): función beta con parámetro α_{fi} de 3 ° y parámetro β_{fi} de 8 °, entre los límites de 20 °y 25 °;
- cohesión efectiva del suelo (c'): función uniforme con valor mínimo a de 2 kPa y valor máximo b de 10 kPa;
- peso unitario seco del suelo (γ_{d}): función normal con media de 14.9 kN m^{-3} y desviación estándar de 0.78 kN m^{-3};
- contenido de humedad del suelo (w): función uniforme con valor mínimo a de 0.10 y valor máximo b de 0.25 ;
- gravedad específica del suelo (G_{s}): determinista de 2.4;
- aporte a la cohesión de las plantas (c_{r}): función uniforme con valor mínimo a de 0.2 kN m^{-2} y valor máximo b de 0.5 kN m^{-2};
- peso de los árboles (q_{v}): función uniforme con valor mínimo a de 0.3 kN m^{-2} y valor máximo b de 0.6 kN m^{-2};
- ángulo del talud (β): distribución triangular con valor mínimo de 60 °, valor máximo de 85 ° y valor más frecuente de 70 °;
- profundidad de la superficie de falla (d): distribución triangular con valor mínimo de 0.9 m, valor máximo de 2.5 m y valor más frecuente de 1.8 m;
- relación de la profundidad del nivel de agua con la profundidad de falla ($\frac{d_{\text{w}}}{d}$): función uniforme con valor mínimo a de 0.4 y valor máximo b de 0.7 ;

Calcule el factor de seguridad contra el deslizamiento, si se genera un número aleatorio entre $[0,1]$ y se obtiene a partir de él todos los valores de las variables que intervienen en el modelo según la distribución de probabilidades que le corresponda.

Use el peso unitario del agua (γ_{w}) igual a 10 kN m^{-3}. Asimismo, use las siguientes expresiones para hallar los distintos pesos unitarios. Sin embargo, para ser más conservadores en las estimaciones asuma que el peso unitario del material arriba de la superficie freática (γ^*) es el mismo saturado.

Para obtener el peso unitario húmedo use

$$\gamma = \frac{G_{\text{s}}\,(1+w)}{(1+e)}\gamma_{\text{w}}. \tag{4.30}$$

Para obtener el peso unitario saturado use

$$\gamma_{\text{sat}} = \frac{G_{\text{s}}+e}{1+e}\gamma_{\text{w}}. \tag{4.31}$$

Para obtener el factor de seguridad use la expresión de la Ecuación 2.28.

4.2. Una ladera natural está conformada por un estrato de suelo de depósito de vertiente paralelo a la superficie del macizo rocoso que la soporta en un espesor (d_e) (distancia perpendicular entre la superficie del terreno y la superficie del macizo). Se decidió analizar la estabilidad bajo el modelo de falla plana.

Sin embargo, la ladera tiene distintas inclinaciones en el sitio de estudio —representadas por la variable β— que responden a una distribución de probabilidades triangular con valor mínimo de 50 °, valor máximo de 80 ° y valor más frecuente de 65 °. El espesor del estrado del suelo se relaciona con la inclinación del talud con la siguiente función:

$$d_e = 6.0642 - 0.8930 \tan\beta .$$

Los demás parámetros se asumen constantes iguales a:

- ángulo de fricción interna efectiva del suelo (ϕ'): 30 °;
- cohesión efectiva del suelo (c'): 20 kPa;
- peso unitario saturado del suelo (γ_{sat}): 19.5 kN m^{-3};
- aporte a la cohesión de las plantas (c_r): 8 kN m^{-2};
- peso de los árboles (q_{ta}): 0.5 kN m^{-2};
- relación de la columna del nivel de agua con la profundidad de falla ($m = \frac{d_w}{d}$): 0.4 .

Use el peso unitario del agua igual a 10 kN m^{-3}, y el peso unitario por encima del nivel de aguas igual al saturado (*i.e.* $\gamma^* = \gamma_{sat}$). La red de flujo que existe en el talud es paralelo a la superficie del terreno y a la superficie de contacto del suelo con la roca.

Tome en cuenta que la profundidad de la superficie de falla (d) se relaciona con d_e del siguiente modo

$$d = d_e \sec\beta .$$

Calcule el factor de seguridad contra el deslizamiento para una sola inclinación de talud, asumiendo un valor aleatorio que se rige por su distribución triangular con parámetros dados arriba. Realice un análisis de esfuerzos efectivos en estado drenado.

Para obtener el factor de seguridad use la siguiente expresión:

$$f_s = \frac{\{q_{ta} + [m\gamma_{sat} + (1-m)\gamma^* - m\gamma_w]\, d\}\cos^2\beta \tan\phi' + (c' + c_r)}{\{q_{ta} + [m\gamma_{sat} + (1-m)\gamma^*]\, d\}\sin\beta\cos\beta}.$$

Para poder generar números aleatorios que respondan a la distribución de probabilidades triangular simétrica use la siguiente función inversa de la distribución acumulada de probabilidades ($F(x)$), que está en el intervalo de $[0,1]$, y que tiene la siguiente expresión matemática:

$$x = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{F(x)}, & \text{para } 0 \le F(x) \le \frac{1}{2}. \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-F(x)}, & \text{para } \frac{1}{2} < F(x) \le 1. \end{cases}$$

4.3. Una ladera natural está conformada por un estrato de suelo de depósito de vertiente paralelo a la superficie del macizo rocoso que la soporta en un espesor (d_e) (distancia perpendicular entre la superficie del terreno y la superficie del macizo). Se decidió analizar la estabilidad bajo el modelo de falla plana.

Sin embargo, la ladera tiene distintas inclinaciones en el sitio de estudio —representadas por la variable β— que responden a una distribución de probabilidades triangular con valor mínimo de 50 °, valor máximo de 80 ° y valor más frecuente de 65 °. El espesor del estrado del suelo se relaciona con la inclinación del talud con la siguiente función:

$$d_e = 6.0642 - 0.8930 \tan\beta .$$

Los demás parámetros se asumen constantes iguales a:

- ángulo de fricción interna efectiva del suelo (ϕ'): 30 °;
- cohesión efectiva del suelo (c'): 20 kPa;
- peso unitario saturado del suelo (γ_{sat}): 19.5 kN m^{-3};
- aporte a la cohesión de las plantas (c_r): 8 kN m^{-2};
- peso de los árboles (q_{ta}): 0.5 kN m^{-2};
- relación de la columna del nivel de agua con la profundidad de falla ($m = \frac{d_w}{d}$): 0.4 .

Use el peso unitario del agua igual a 10 kN m^{-3}, y el peso unitario por encima del nivel de aguas igual al saturado (*i.e.* $\gamma^* = \gamma_{sat}$). La red de flujo que existe en el talud es paralelo a la superficie del terreno y a la superficie de contacto del suelo con la roca.

Tome en cuenta que la profundidad de la superficie de falla (d) se relaciona con d_e del siguiente modo

$$d = d_e \sec\beta .$$

Se pide calcular el factor de seguridad contra el deslizamiento para una sola inclinación de talud, asumiendo un valor aleatorio que se rige por su distribución triangular con los parámetros dados arriba. Realice un análisis de esfuerzos efectivos en estado drenado.

Para obtener el factor de seguridad use la siguiente expresión:

$$f_s = \frac{\{q_{ta} + [m\gamma_{sat} + (1-m)\gamma^* - m\gamma_w]\, d\}\cos^2\beta\tan\phi' + (c' + c_r)}{\{q_{ta} + [m\gamma_{sat} + (1-m)\gamma^*]\, d\}\sin\beta\cos\beta} .$$

Para poder generar números aleatorios que respondan a la distribución de probabilidades triangular simétrica use la siguiente función inversa de la distribución acumulada de probabilidades ($F^{-1}(U) = T$), que está en el intervalo de $[0,1]$, y que tiene la siguiente expresión matemática:

$$T = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{U}, & \text{para } 0 \le U \le \frac{1}{2}. \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-U}, & \text{para } \frac{1}{2} < U \le 1. \end{cases}$$

Referencias

[1] AMINI, M.; MAJDI, A. y AYDAN, Ö: «Stability analysis and the stabilization of flexural toppling failure». *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2009, **42**, pp. 751–782.

[2] AMVA: «Requisitos mínimos para los estudios geotécnicos en el Valle de Aburrá». *Geoguía 1*, Área Metropolitana del Valle de Aburrá, Medellín- Colombia, 2008. Unpublished.

[3] BANDIS, S.C.; LUMSDEN, A.C. y BARTON, N.R.: «Experimental studies of scale effects in the shear behavior of rock joints». *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 1981, **18**, pp. 1–21.

[4] BARTON, N.: «Scale effects or sampling bias?» En: A. Pinto da Cunha (Ed.), *Proceedings of the 2nd International Workshop on Scale Effects in Rock Masses*, pp. 31–55. Balkema, Lisbon, 1993.

[5] BARTON, N.R. y CHOUBEY, V.: «The shear strength of rock in theory and practice». *Rock Mechanics*, 1977, **10**, pp. 1–54.

[6] BISHOP, A.W.: «The use of the slip circle in the stability analysis of slopes». *Géotechnique*, 1955, **5**, pp. 7–17.

[7] BISHOP, A.W. y MORGENSTERN, N.R.: «Stability coefficients for earth slopes». *Géotechnique*, 1960, **10**, pp. 129–150.

[8] BORG, H.; STONEMAIN, G.L. y WARD, C.G.: «The effect of logging and regeneration of groundwater, streamflow ans stream salinity in the southern forests of Western Australia». *Journal of Hydrology*, 1988, **99**, pp. 253–270.

[9] BROMHEAD, E.N.: «Large landslides in London clay at Herne B, Kent.» *Quarterly Journal of Engineering Geology*, 1978, **11**, pp. 291–304.

[10] BROWN, E.T.: «Estimating the mechanical properties of rock masses». En: Y. Potvin; J. Carter; A. Dyskin y R. Jeffrey (Eds.), *Proceedings of the 1st Southern Hemisphere International Rock Mechanics Symposium (SHIRMS 2008)*, pp. 3–21. Australiam Centre for Geomechanics, Perth, 2008.

[11] CHAU, K.T.; WONG, R.H.C.; LIU, J.; WU, J.J. y LEE, C.F.: «Shape effects on the coefficients of restitution during rockfall impacts». En: G. Vouille y P. Berest (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the International Society of Rock Mechanics*, pp. 541–544. Balkema Rotterdam, Paris, France, 1999.

[12] CHENG, Y.M. y LAU, C.K.: *Slope stability analysis and stabilization: New methods and insight*. Routledge, New York, 1^a edición, 2008.

[13] CHICA-SANCHEZ, A.: *Aspectos mecánicos e hidráulicos de las rocas*. Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 1^a edición, 1979.

[14] COLLIN, A.: *Recherches expérimentales sur les glissements spontanés des terrains argileux, accompagnées de considerations sur quelques principles de la méchanique terrestre*. Carilian-Goeury and Dalmont, Paris, 1846.

[15] DE PAOR, D.G.: *Structural geology and personal computers*. volumen 15 de *Computer Methods in the Geosciences*, capítulo Stereonet applications for Windoes and Macintosh, pp. 233–235. Elsevier, New York, 1^a edición, 1996.

[16] DEVROYE, L.: *Non-uniform random variable generation*. Springer, New York, 1^a edición, 1986.

[17] DJ. ALZATE CASTAÑO, R.: *Estabilidad de taludes con aplicación en zonas húmedas tropicales*. Editorial Universidad Tecnológica del Chocó, Quibdó, 1^a edición, 2005.

[18] DONN, W.L. y SHIMER, J.A.: *Graphic methods in structural geology*. Appleton Century Crofts inc., New York, 1958.

[19] DORREN, L.; DOMAAS, U.; KRONHOLM, K. y LABIOUSE, V.: *Rockfall Engineering*. capítulo Methods for predicting rockfall trajectories and run-out zones, pp. 143–173. 5. ISTEC Ltd., London, 1^a edición, 2011.

[20] E.CLAR: «Gefügestatistisches zur metasomatose». *Zeitschrift für Kristallographie, Mineralogie und Petrographie*, 1933, **43(3)**, pp. 129–143.

[21] EVANS, S. y HUNGR, O.: «The assessment of rockfall hazard at the base of talus slopes». *Canadian Geotechnical Journal*, 1993, **30**, pp. 620–636.

[22] FELLENIUS, W.: «Kaj-och jordrasen i Goteborg». *Teknisk Tidskrift V.U.*, 1918, **48**, pp. 17–19.

[23] ——: *Erdstatische Berechnungen mit Reinbung und Kohasion*. Ernst, Berlin, 1927.

[24] ——: «Calculation of the stability of earth dams». En: ICOLD (Ed.), *Transactions of the 2nd Congress on Large Dams*, volumen 4, pp. 445–459. Washington D.C., 1936.

[25] GIBSON, R.E. y MORGENSTERN, N.: «A note of the stability of cuttings in normally consolidated clays». *Géotechnique*, 1962, **12(3)**, pp. 212–216.

[26] GOODMAN, R.: *Introduction to rock mechanics*. John Wiley & Sons, New York, second^a edición, 1989. ISBN 0-471-81200-5.

[27] GRAY, D.H. y OHASHI, H.: «Mechanics of fiber reinforcement in sands». *Journal of Geotechnical Engineering*, 1983, **109(3)**, pp. 335–353.

[28] GREENWAY, D.R.: *Slope stability*. capítulo Vegetation and slope stability. John Wiley & Sons, New York, 1^a edición, 1987.

[29] GRIFFITHS, D.V.; HUANG, J. y DEWOLFE, G.F.: «Numerical and analytical observations on long and infinite slopes». *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2011, **35**, pp. 569–585.

[30] GRIFFITHS, D.V. y LANE, P.A.: «Slope stability analysis by the finite elements». *Geotéchnique*, 1999, **49(3)**, pp. 387–403.

[31] GROSHONG JR, R.H.: *3-D structural geology: a practical guide to quantitative surface and subsurface map interpretation*. Springer, Berlin, 2^a edición, 2006.

[32] HAMMOND, C.; HALL, D.; MILLER, S. y SWETIK, P.: «Level I stability analysis (LISA) documentation for version 2.0». *General Technical Report INIT-285*, U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Intermountain Research Station, Ogden, UT, 1992.

[33] HOEK, E. y BRAY, J.: *Rock slope engineering*. Institution of Mining and Metallurgy, 2^a edición, 1977.

[34] HOEK, E.; CARRANZA-TORRES, C. y CORKUN, B.: «Hoek-Brown failure criterion 2002 edition». En: *Proceedings of the NARMS-TAC Conference*, volumen 1, pp. 267–273. Toronto, 2002.

[35] HOEK, EVERT y BROWN, EDWIN T.: «Empirical strength criterion for rock masses». *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 1980, **106(GT9)**, pp. 1013–1035. Art. 15715.

[36] HOLLAND, J.: *Adaptation in natural and artificial systems*. University of Michigan Press, Ann Arbol, MI, 1975.

[37] HORNINGER, VON G.: «Der Schärdinger Granit». *Zeitschrift für Kristallographie, Mineralogie und Petrographie*, 1935, **47(1)**, pp. 26–79.

[38] IMRE, B.; RÄBSAMEN, S. y SPRINGMAN, S.M.: «A coefficient of restitution of rock materials». *Computers and Geosciences*, 2008, **34**, pp. 339–350.

[39] IVERSON, R.M.: «Groundwater flow fields in infinite slopes». *Géotechnique*, 1990, **40(1)**, pp. 139–143.

[40] JANBU, N.: «Stability analysis of slopes with dimensionless parameters». *Soil Mechanics Series 46*, University of Harvard, Cambridge, 1954.

[41] ——: *Embankment-Dam Engineering*. capítulo Slope stability computations, pp. 47–86. John Wiley & Sons, New York, 1973.

[42] JORGENSEN, H.: «Influences of forest management and drainage on groundwater fluctuations». En: W.W. Sopper y H.W. Lull (Eds.), *Procceedings of the Symposium on Forest Hydrology*, 325-334, pp. 325–334. Pergamon, 1967.

[43] KARZULOVIC, A. y READ, J.: *Guidelines for open pit slope design*. capítulo Rock mass model, pp. 83–139. 5. CSIRO, Collingwood, 1^a edición, 2009.

[44] KENNEDY, J. y EBERHART, R.: «Particle swarm optimization». En: *Proccedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, volumen 4, pp. 1942–1948. University of Weatern Australia, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Peth, WA, 1995.

[45] KIRKBY, M.J. y STATHAM, I.: «Surface stone movement and scree formation». *Journal of Geology*, 1975, **83**, pp. 349–362.

[46] KORN, G.A. y KORN, T.M.: *Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems, and formulas*. Dover Publicatioins, New York, 2^a edición, 1968. Republicated in 2000.

[47] LI, A.J.; MERIFIELD, R.S. y LYAMIN, A.V.: «Stability charts for rocks slopes based in the Hoek-Brown failure criterion». *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2008, **45**, pp. 689–700.

[48] LISLE, R.J. y LEYSHON, P.R.: *Stereographic projection techniques for geologists and civil engineers*. Cambridge University Press, London, 2^a edición, 2004.

[49] LITTLE, A.L. y PRICE, V.E.: «The use of an electronic computer for slope stablity analysis». *Géotechnique*, 1958, **8(3)**, pp. 113–120.

[50] LOUDON, T.V.: «Computer analysis of orientation data in structural geology». *Technical Report 13*, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1964. Office of Naval Research, Geography Branch., Contract 1228(26) ONR Task 389-135.

[51] LOUIS, C.: «Introduction a l'hydraulique des roches». *Bulletin du Bureau de Recherches Géologiques et Mini eres*, 1974, **3(4)**, pp. 283–356.

[52] MAJDI, A. y AMINI, M.: «Flexural toppling failure in rock slopes: from theory to applications». *International Journal of Mining and Geo-Engineering*, 2011, **45(1)**, pp. 21–32.

[53] MEGAHAN, W.F.: «Snow melt and logging influence on piezometric levels in steep forested watersheds in Idaho». *Technical report*, Transportation Research Board, National Research Council, Washington, 1984.

[54] METZ, K.: *Lehrbuch der Tektonischen Geologie*. Ferdinand Enke Verlag, Stuttgart, 1^a edición, 1957.

[55] ——: *Manual de geología tectónica*. Ediciones Omega s.a., Barcelona, 1^a edición, 1963. Traduced from German to Spanish by: J.M. Ríos and C. Gaitán de Ayala.

[56] MORGENSTERN, N.R. y PRICE, V.E.: «The analysis of the stability of general slip surfaces». *Géotechnique*, 1965, **15**, pp. 79–93.

[57] ——: «A numerical method for solving the equations of stability of general slip surfaces». *Computer Journal*, 1967, **9(4)**, pp. 388–393.

[58] OKSANEN, J.: «Why the beta-function cannot be used to estimate skewness of species responses». *Jounral of Vegetation Science*, 1997, **8**, pp. 147–152.

[59] O'LOUGHLIN, C.L. y ZIEMER, R.R.: *Carbon uptake and allocation in subalpine ecosystems as a key to management*. capítulo The importance of root strength and deterioration rates upon edaphic stability in steepland forest, pp. 70–78. Proceedings of an IUFRO workshop P.I. 107-00 Ecology of subalpine zones. Oregon State University, Corvallis, Oregon, USA, 1^a edición, 1982.

[60] PHILLIPS, F.C.: *La aplicación de la proyección estereográfica en geología estructural*. Editorial Blume, Rosario, 3^a edición, 1975. Traduced to Spanish: C.M. Escorza.

[61] RAGAN, D.M.: *Structural geology: An introduction to geometrical techniques*. John Wiley & Sons, New York, 1^a edición, 1985.

[62] ——: *Geología estructural: introducción a las técnicas geométricas*. Ediciones Omega s.a., Barcelona, 1^a edición, 1986. Traduced from English to Spanish by: M. Domingo Miró.

[63] RAYUDU, D.P.: *Computer simulation of rockfalls: Application to rockfalls at Fox Glacier, West Coast–New Zealand*. Msc. thesis, Lincoln University, Canterbury New Zealand, New Zealand, 1997.

[64] ROCKSCIENCE: *RockLab V.1.021*. RockScience Onc., Toronto, Canadá, 2006.

[65] ROWLAND, S.M.; DUEBENDORFER, E.M. y SCHIEFELBEIN, I.M.: *A laboratory course in structural geology*. Blackwell Publishing, Malden, 3^a edición, 2007.

[66] SANDER, B.: *Gefügekunde der Gesteine*. Anon., Leipzig, 1930.

[67] SARMA, S.K.: «Stability analysis of emabankments and slopes». *Geotéchnique*, 1973, **23(3)**, pp. 423–433.

[68] SCHMIDT, W.: *Statistische Methoden zur Gefügeuntersuchung kristalliner Schiefer*. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch., Wien, 1917.

[69] ——: «Gefügestatistik». *Tschermaks mineralogische und petrographische Mitteilungen*, 1925, **38(1)**, pp. 392–423. Article 23.

[70] SCHUENEMEYER, J.H.; KOCH, G.S. y LINK, R.F.: «Computer program to analyze directional data, based on the methods of Fisher and Watson». *Mathematical Geology*, 1972, **49A(3)**, pp. 177–202.

[71] SENGUPTA, A. y UPADHYAY, A.: «Locating the critical failure surface in a slope stability analysis by genetic algorithm». *Applied Soft Computing*, 2009, **9**, pp. 387–392.

[72] SIMONS, N.; MENZIES, B. y MATTHEWS, M.: *A short course in soil and rock slope engineering*. Thomas Telford, London, 1^a edición, 2001. ISBN 0 7277 2871 7.

[73] SÓBOL, I.M.: *Método de Monte Carlo*. Lecciones populares de matemáticas. Moscú, 2^a edición, 1983. Traducido del Ruso al Castellano por C.Vega.

[74] SPENCER, E.: «A method of analysis of the stability of emabankments assuming parallel inter-slice forces». *Geotéchnique*, 1967, **17(1)**, pp. 11–26.

[75] STARKEY, J.: «A computer programme to construct spherical projections». En: P. Paulitsch (Ed.), *Proceedings of the International Symposium: Experimental and natural rock deformation*, pp. 38–74. Springer, Darmstadt, 1970.

[76] STURGES, H.A.: «The choice of a class interval». *Journal of the American Statistical Association*, 1926, **21(153)**, pp. 65–66.

[77] SUAREZ-BURGOA, L.O.: *Rock mass mechanical behavior assessment at the Porce III underground hydropower central, Colombia South America*. Msc. thesis, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia, 2008.

[78] TAHA, M.R.; KHAJEHZADEH, M. y EL-SHAFIE, A.: «Slope stability assessment using optimization techniques: an overview». *EDJE*, 2010, **15**, pp. 1901–1915.

[79] TAYLOR, D.W.: «Stability of earth slopes». *Journal of the Boston Society of Civil Engineers*, 1937, **24(3)**, pp. 197–246, 337–386. Reprinted in *Contributions to Soil Mechanics: 1925–1940, Boston Society of Civil Engineers*.

[80] TELLING, R.M.: «The effect of anisotropy of permeability on the stability of soil slopes under seepage flow». *Technical Report G/006*, South Bank Polytechnic, 1987.

[81] ——: «Discussion: The Portworthy china clay tailings disposal scheme». *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 1988, **84(2)**, pp. 423–428. Doi: 10.1680/iicep.1988.78.

[82] TSE, R. y CRUDEN, D.M.: «Estimating joint roughness coefficients». *International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences*, 1979, **16(5)**, pp. 303–307.

[83] URIBE VELAZQUEZ, S.: *Estudio geológico y estructural de la mina La Margarita, Titiribí–Antioquia*. Bsc. thesis, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia, 1992. T553.20986126/U74.

[84] VAN EVERDINGEN, D.A.; VAN GOOL, J.A.M. y VISSERS, R.L.M.: «Quickplot: a microcomputer.based program for processing of orientation data». *Computers and Geosciences*, 1992, **18(2-3)**, pp. 183–287.

[85] WU, T.H.; MCKINELL, W.P. y SWANSTON, D.N.: «Strength of tree roots and landslides on Price of Wales island, Alaska». *Canadian Geotechnical Journal*, 1979, **16(1)**, pp. 19–33.

[86] XUE, J. y GAVIN, K.: «Simultaneous determination of critical slip surface and reliability index for slopes». *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2007, **133**, pp. 878–886.

[87] YU, X. y VAYSSADE, B.: «Joint profiles and their roughness parameters». *International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences*, 1991, **28(4)**, pp. 333–336.

[88] ZENG, S.; SUN, B.; YANG, S. y TAN, K.: «Search for critical slip surface and reliability analysis of soil slope stability based in Matlab». En: L. Ge; J. Liu; J.-C. Ni y Z. He (Eds.), *Slope stability, retaining walls, and foundations: selected papers*, Article 197, pp. 184–189. Changha-Hunan, 2009. doi: 10.1061/41049(356)26.

Apéndice A
Proyección esférica estereográfica

Es muy común en las Ciencias de la Tierra, que los datos o los resultados de medidas de planos, lineamientos u otra facción geométrica tridimensional se hagan en gráficas bidimensionales resultado de una proyección estereográfica (malla de Wulff) o una proyección equiárea Lambert (malla Lambert o malla de Schmidt, aunque este último nombre no es el apropiado). La aplicación de la proyección esférica es muy antigua.

Las proyecciones esféricas son útiles para hacer una transformación de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ también usada en cartografía, y hasta ahora las proyecciones Wulff y Lambert particulares no fueron sustituidas inclusive con el actual auge de las tecnologías de información y comunicación, y los diversos métodos de visualización tridimensional que ahora está a nuestro alcance (*e.g.* la visión tridimensional a través de lentes polarizados).

Medidas de planos corresponden a: planos de foliación, planos axiales de pliegues, juntas y fallas. Medidas de lineamientos corresponden a: eje de pliegues; ejes tectónicos; líneas resultado de la intersección del clivaje y la estratificación; elongaciones de minerales, fósiles, o partículas; o lineamientos sedimentarios o tectónicos en general.

El lector tiene que tener conocimiento de: los conceptos de la proyección estereográfica y de la proyección en la esfera unitaria equiárea; del concepto de orientación de una línea a través de su acimut y cabeceo, orientación de un plano a través de su línea polar (*i.e.* polo de un plano), de su línea de máxima pendiente o de la traza que forma el plano con la esfera unitaria. Estos conceptos pueden repasarse en: [60], que es un clásico en el tema y además que se publicó la traducción al castellano; o [48] que es un libro más reciente, muy didáctico y completo. También los anexos o capítulos específicos de [26] (Ap. 5), [13] (Cap. 2), [65] (Cap. 5) y [31] (Sec. 2.3.1); resumen los fundamentos que se necesitan para este fin.

A.1. Reseña histórica

Las primeras aplicaciones de los diagramas en proyección esférica se dieron en Austria y Alemania a finales del siglo XIX.

La aplicación de conceptos de estadística en el plano de la proyección esférica se le atribuye al Profesor Walter Schmidt quien sistematizó el método en 1917, en idioma Alemán [68], al publicar su artículo titulado *Métodos estadísticos para investigar la microestructura de esquistos cristalinos*. En 1925 se vuelve a publicar el método en un nuevo artículo [69], también en idioma Alemán, titulado *Estadística de estructuras*, y fue este artículo que se difundió en el medio de la geología estructural.

Las primeras aplicaciones del método de Schmidt se encuentran en artículos de principios del siglo XX, tales como [20, 37].

Similar aplicación se le dio en la estimación de la forma de los plieges y la orientación espacial del eje axial de los mismo; con el método propuesto por el Profesor Alemán Bruno Sander; lo que después se llamaría el método del diagrama β [66].

Fue a partir de la escuela austro-alemana que se difundió el método, y para después de la Segunda Guerra Mundial la aplicaciones de la proyección esférica se amplió en la escuela norteamericana.

A mediados de los años 50 se publica ya de la escuela norteamericana y en idioma inglés el libro de *Métodos gráficos en geología estructural* [18], donde se le dedica toda un parte de tres capítulos al final del libro a los procedimientos gráficos cuantitativos en la proyección esférica.

Para principios de los sesenta se traduce del Alemán al Español el libro del autor alemán Metz [55], siendo posiblemente el primer texto en nuestro idioma que muestras las aplicaciones de la proyección esférica. Sin embargo, el autor en su tratado original [54] no dedica ningún capítulo a este método a más de diete páginas para las gráficas Schmidt y otras seis para las gráficas β; ni tampoco explica de forma clara el uso de estos métodos, por lo que la potencialidad de la proyección esférica pasa desapercibida.

Un texto en Español que marcó el inicio de la aplicación extensiva de la proyección esférica en la geología estructural fue la traducción del Inglés [61] al Español [62] del libro de Ragan a mediados de los años ochenta.

El método estadístico de Schmidt se aplicó también a la ingeniería geológica e hidrogeología en la década de los setenta.

Para finales de los años setenta, el Profesor Alejandro Chica publica un texto de enseñanza [13] basado en el un artículo de Louis [51], donde se muestra el uso de la proyección esférica para caracterizar la conductividad hidráulica del macizo rocoso diaclasado.

La aplicación extensiva de los métodos en diagramas de proyección esférica en Colombia se dio en la década de los noventa. Se menciona por ejemplo las tesis de grado como las de: [83] que usó para generar los diagramas de contorno de densidades de polos Schmidt el programa SPLOT a parte del método manual. ...

Estas proyecciones esféricas, Wulff y Lambert, son atractivas para desarrollarlas en códigos o en programas computacionales de aplicación a las geociencias; y fue en este orden cómo las primeras aplicaciones de la ingeniería de software a finales de los años sesenta y toda la década de los setenta se desarrollaron en Geociencias (*e.g.* [50, 75, 70]). Estos programas fueron escritos en ese entonces en el lenguaje de programación FORTRAN-IV.

El programa de Loudon [50] fue escrito en Fortran IV para el sistema IBM 709. El programa de Starkley [75] fue también escrito en Fortran IV para el sistema CalComp 563, y posteriormente traducido al lenguaje de programación Turbo Pascal y denominado *Net* a principios de los ochenta del siglo pasado. El programa NET sigue vigente en la actualidad. El programa de Schuenemeyer y colaboradores también escrito en Fortran IV [70].

Luego, para década de los 80 y mediados de los 90 surgieron varios otros códigos, escritos en FORTRAN-77, BASIC y variaciones (GW-BASIC, Q-BASIC), y PASCAL y variaciones (Turbo Pascal); todos ellos desarrollados para fines de investigación o académicos, y diseñados para realizar tareas específicas [84]. No fue hasta casi mediados de los años noventa que se desarrollaron programas computacionales comerciales con aplicaciones generales [15] escritos predominantemente en lenguaje *C* y variaciones (Turbo *C*, *#C*, C^{++}). A finales de los 90 la tendencia fue creciendo en la elaboración de programas más robustos, pero paralelamente hacia el uso de rutinas prototipo en MATLAB®, y a partir de ello existen varias opciones de elección entre distintos programas para este fin, que se listan por ejemplo en [48].

Por lo normal, la orientación de las facciones geométricas de interés en geomecánica y geología estructural, como planos o líneas en el espacio, se presentan en los artículos científicos a través de una proyección esférica a un plano del lugar geométrico que resulta de la intersección de esas facciones con una esfera de radio unitario (*i.e.* las trazas de las facciones). Estas facciones tienen que pasar por el centro de la esfera.

Dependiendo de la aplicación, la proyección de la traza de cada facción con la esfera se hace con una línea o un arco circular; y la traza se proyecta desde uno de los polos (sea el sur o el norte) sobre un plano horizontal ubicado en el ecuador de la esfera, o en uno de sus polos. Todas estas variaciones hacen que se tengan distintos tipos de proyecciones esféricas; pero las más usadas en mecánica de rocas y geología estructural son: la proyección Wulff (llamada también *proyección estereográfica*) y la proyección Lambert.

Estas proyecciones pueden representar una transformación donde los ángulos se conservan (*i.e.* proyección equiángulo, correspondiente a la proyección Wulff) o donde las áreas se conservan (*i.e.* proyección equiárea, correspondiente a la proyección Lambert). Estas transformaciones son de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ y están bien documentadas en diversos textos referentes al tema, por ejemplo [48].

A.2. La traza de un plano

Muchas veces uno no tiene a la mano una red estereográfica y sin ella aparentemente no podría dibujar de forma exacta las trazas de los planos que se orientan en el espacio. Sin embargo, es posible hacer una gráfica *exacta* en un papel de hoja con la ayuda de una calculadora básica científica, un compás, una escuadra y un transportador de 360 °. Se recomienda que el círculo mayor donde se representará la proyección estereográfica tenga un radio mínimo de 5 cm.

La dirección de buzamiento del plano (ζ_{dir}) se mide de forma directa en la hoja con la ayuda del transportador. El aspecto complicado que se tiene que tomar en cuenta es el dibujo de la traza del plano.

Se puede afrontar este aspecto mediante dos procedimientos que se describe a continuación.

A.2.1. Primer procedimiento

1. El arco de circunferencia que formaría la traza del plano que se desea representar tiene un radio R_{g} y un centro ubicado a una distancia r_{g} del centro del diagrama hacia afuera sobre la línea de la dirección de buzamiento, que hay que calcularlos en función a la inclinación del buzamiento ζ; es decir

$$R_{\text{g}} = R \sec \zeta, \tag{A.1}$$

$$r_{\text{g}} = R \tan \zeta. \tag{A.2}$$

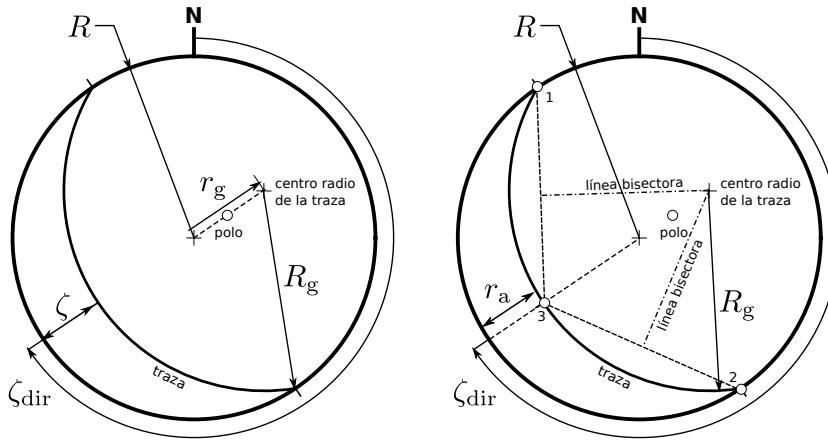
2. Encontrado el centro y el radio de la traza del plano, se logra dibujar aquel arco que está enmarcado dentro del círculo mayor que representa la proyección estereográfica.

En todos los casos, R es el radio del círculo mayor del diagrama estereográfico; que es el que a la vez dará la escala del diagrama en la hoja donde esté trazando.

Por ejemplo, si de desea dibujar la traza y el polo del plano $236\backslash 25$ y con $R = 1$ se tendría que $R_{\text{g}} = 1.1034$ y $r_{\text{g}} = 0.4663$. En la Figura A.1(a) se muestra lo explicado en las ecuaciones descritas para el ejemplo planteado.

A.2.2. Segundo procedimiento

Una forma más libre de errores de precisión gráfica para el dibujo del arco de circunferencia es a través de encontrar tres puntos que definen el arco.



(a) primer procedimiento (b) segundo procedimiento

Figura A.1 Variables para dibujar las trazas de los planos.

Dos puntos ya son conocidos (puntos 1 y 2) una vez se conoce la dirección de buzamiento del plano, estos son los dos puntos que resultan de la intersección de la línea de rumbo del plano con el círculo mayor del diagrama (*i.e.* la intersección con la superficie de la semiesfera).

Sólo faltaría ubicar el tercer punto del plano (punto 3); este sería cualquiera, pero es más fácil encontrar el punto que representa la intersección de la línea de máxima pendiente del plano con la semiesfera (*i.e.* el punto que define la dirección del buzamiento del plano). Este punto se encuentra sobre la línea de la dirección del buzamiento y una distancia de r_a desde el extremo del círculo mayor hacia el centro del mismo; donde

$$r_a = R\,(1 - \sec\zeta + \tan\zeta)\,. \tag{A.3}$$

Determinado este tercer punto uno puede construir el arco de circunferencia mediante el siguiente procedimiento.

1. De los tres puntos que definen el arco, una mediante una línea dos pares de puntos que estén adyacentes; de este modo, se tiene dos líneas: línea 1-3 y línea 3-2.
2. A cada línea encuéntrele una línea bisectora (*i.e.* línea normal a la anterior y que la divide en dos partes iguales).
3. Extienda cada línea bisectora de tal modo de encontrar su intersección; esta intersección será el centro del arco que se le llamará el punto 0.
4. Con centro en 0 y radio $R_g = d_{01} = d_{02} = d_{03}$ se traza un arco que pase por los puntos 1, 2 y 3; donde d_{0i} es la distancia del centro 0 al punto i para $i = 1, 2, 3$.

Para el ejemplo anterior, la Figura A.1(b) muestra la variables de este segundo procedimiento. Estas formas de construir son válidas para la proyección esférica equiangular únicamente (*i.e.* proyección estereográfica). La facilidad del trazado es también posible solo en esta proyección; cosa que no es posible así de sencillo para el caso de la proyección esférica equiárera.

A.3. El polo de un plano

Muchas veces uno no tiene a la mano una red estereográfica y sin ella aparentemente no podría dibujar los polos de forma exacta. Sin embargo, es posible hacer una gráfica *exacta* con la ayuda de una calculadora básica científica, un compás, una escuadra y un transportador de 360 °. Se recomienda que el círculo mayor donde se representará la proyección estereográfica tenga un radio mínimo de 5 cm.

El acimut del polo del plano (δ_{dir}) se mide de forma directa en la hoja con la ayuda del transportador. El aspecto que se tiene que tomar en cuenta es el cabeceo del polo del plano.

Para ello, tome en cuenta que la posición del *complemento del cabeceo* del polo del plano ($90^\circ - \delta$) depende del cabeceo del polo δ; es decir, que la longitud radial desde el centro del diagrama en dirección del azimut del polo es el complemento del cabeceo en un valor de

$$r_{\text{p}} = R \tan\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right). \tag{A.4}$$

La variable R es el radio del círculo mayor del diagrama estereográfico; que es el que a la vez dará la escala del diagrama en la hoja donde esté trazando (Fig.A.2).

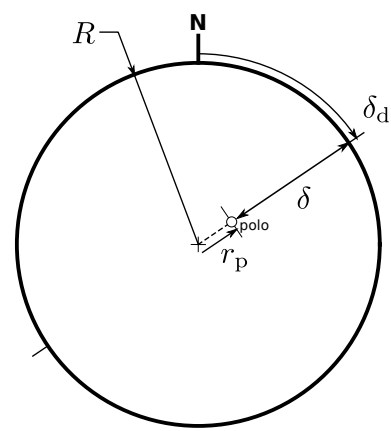


Figura A.2 Variables para dibujar los polos de los planos.

El algoritmo de cálculo en MATLAB® que se muestra a continuación posibilita dibujar la traza y el polo de un plano en la proyección esférica (fastEquiangPlanePlotParamsSCR.m)

```
% Requires Buzy+ toolbox %
addpath('/media/dataWork/ownDevProgsMATLAB/buzyPlus/')
% Center and radius of the stereographic net %
diagramCenterCoords =[ 0, 0 ];
diagramRadiusInMM =1;
% Dip direction and dip of the plane is wanted to plot %
dipdirP1Array =[ 236, 25 ];
% Plane pole calculation %
trendPlungeP1Array =dipdirdip2pole( dipdirP1Array );
% Center and radius of the plane trace %
dipdirP1ArrayRad =dipdirP1Array *pi/180;
trendPlungeP1ArrayRad =trendPlungeP1Array *pi/180;
Rg =diagramRadiusInMM *sec( dipdirP1ArrayRad(2) );
rg =diagramRadiusInMM *tan( dipdirP1ArrayRad(2) );
display( Rg );
display( rg );
% Radial longitude from net center to the complement angle of the plunge %
rp =diagramRadiusInMM *tan( (pi/2 -trendPlungeP1ArrayRad(2))/2 );
display( rp );
```

A.4. El círculo de ϕ grados de radio concéntrico al círculo mayor

Muchas veces uno no tiene a la mano una red estereográfica y sin ella aparentemente no podría dibujar de forma exacta un círculo concéntrico de ϕ grados de radio r_ϕ a partir del centro del diagrama.

Del mismo modo a los casos anteriores, se recomienda que el círculo mayor donde se representará la proyección estereográfica tenga un radio mínimo de 5 cm.

El radio estaría dado por

$$r_\phi = R \tan\left(\frac{\phi}{2}\right). \tag{A.5}$$

Por ejemplo, si de desea dibujar un círculo concéntrico de valor de $\phi = 40^\circ$ con $R = 1$ se tendría que $r_{\text{Œ}} = 0.36$ (Fig. A.3).

Ejercicio A.1. Dibuje las trazas y los polos de los siguientes tres planos de discontinuidad: 020/60, 130/40 y 080/20; según lo indicado en el método manual de dibujo de la traza y el polo de un plano en la proyección estereográfica.

Solución A.1. Se calcula la orientación de los polos de los mencionados planos. Utilizando

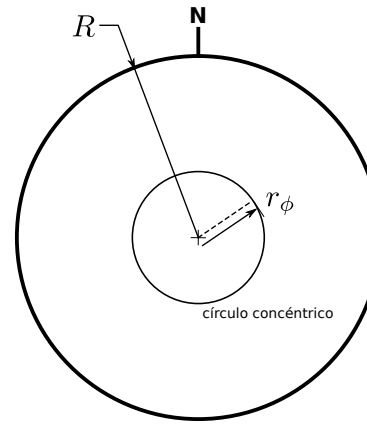


Figura A.3 Variable para dibujar el círculo de ϕ grados de radio concéntrico al círculo mayor.

Plano	Dirección de buzamiento en °	Buzamiento en °	Azimut polo en °	Cabeceo polo en °
1	020	60	200	30
2	130	40	310	50
3	080	20	260	70

la guía para el dibujo manual de la traza y el polo de un plano (proyección estereográfica), se calcula los siguientes valores para los radios desde el centro del diagrama, que posibilitará dibujar tanto las trazas como los polos de los planos.

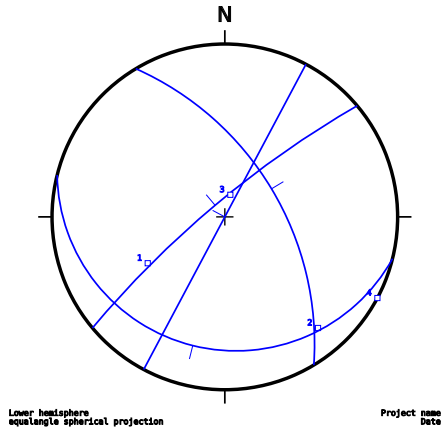
Plano	R_g	r_g	r_p
1	20.0	17.3	5.8
2	13.0	8.4	3.6
3	10.6	3.6	1.8

Con los anteriores valores se dibuja en cualquier programa de dibujo computacional.

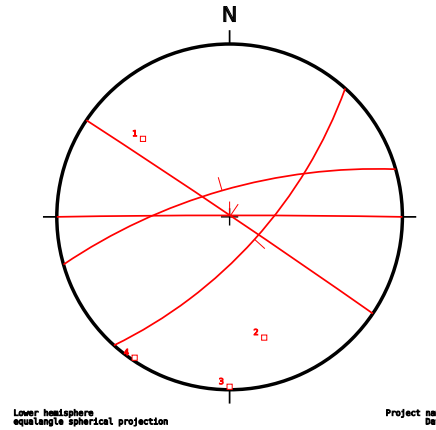
□

Ejercicio A.2. En las cuatro gráficas que se muestra en la Figura A.4, en cada una de ellas se tiene de cuatro a cinco polos que representan planos de discontinuidad orientados en el espacio en el macizo rocoso del complejo subterráneo de Porce 3 (Colombia). La proyección de estas representaciones es esférica estereográfica.

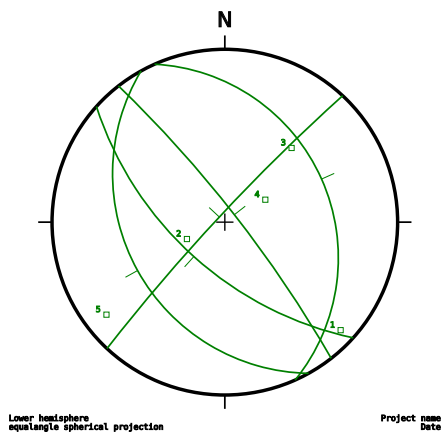
Mediante las ecuaciones de dibujo manual que se muestra en el anexo A se solicita que encuentre los valores numéricos aproximados de las orientaciones de estos planos en el formato dirección de buzamiento y buzamiento (000\ 00).



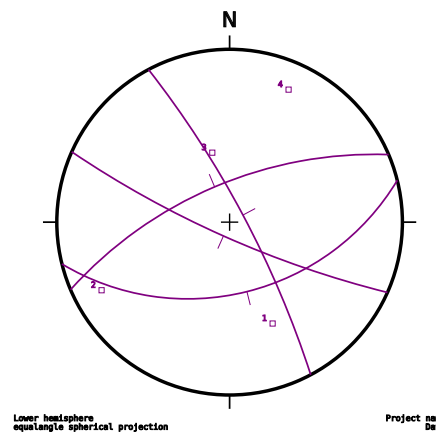
(a) sitio 1, falla 1



(b) sitio 1, falla 2



(c) sitio 1, falla 3



(d) sitio 1, falla 4

Figura A.4 Proyección estereográfica de polos de planos, de [77], Vol.2, páginas 195 a 196, generado con el código svgstereographicplot.

Solución A.2. En la Sección A.3 se mostraba un procedimiento para ubicar y dibujar el polo de un plano en la proyección estereográfica mediante una ecuación (Ec. A.4) que posibilitaba encontrar sobre una línea de acimut (con un dirección δ_{dir}) la dimensión en el plano de la distancia del centro del diagrama hacia el punto donde se localiza el polo (r_{p}), conociendo el valor del cabeceo del polo (δ). El valor de δ se obtiene del dato inicial del

buzamiento del plano (ζ), y el valor de δ_{dir} de la orientación de buzamiento del mismo plano (ζ_{dir}).

En el caso del presente problema, estamos tratando el problema inverso del descrito arriba. Nos piden obtener ζ_{dir} y ζ conociendo r_{p} y δ_{dir}. Estas dos variables las podemos medir en las gráficas de forma manual; y lo que faltaría sería encontrar δ.

Despejando δ de la ecuación A.4 tenemos que

$$\delta = 2\left[45 - \frac{180}{\pi}\arctan\left(\frac{r_{\text{p}}}{R}\right)\right];$$

donde R es el radio del diagrama estereográfico, que también lo medimos de forma manual.

Luego de hallar δ obtenemos que

$$\zeta = 90 - \delta;$$

y

$$\zeta_{\text{dir}} = (\delta_{\text{dir}} + 180)_{\text{mod},360}\,.$$

Esta sucesión de pasos lo podemos resumir en un pseudocódigo.

Algorithm A.4.1: OBTNDIPDIRDIPFROMGRAPH($R, rp, deltaDir$)

global *pi*
$delta \leftarrow 2 * (45 - 180/pi * atan(rp/R))$
$zeta \leftarrow 90 - delta$
$zetaDir \leftarrow mod(delta + 180, 360)$
return $(zetaDir, zeta)$

Para agilizar cálculos repetitivos creamos una función. El siguiente listado muestra la solución del pseudocódigo en Python3®.

```
import math

def obtndipdirdipfromgraph( R, rp, deltaDir ):
    ''''
    Description:
    Calculates the dip-direction and dip angles from manual measurements on
     an
    stereographic representation.
        R : grat circle radius plane distance;
        rp : plane distance from center to the pole;
        deltaDir : pole acimut.

    Returns:
        zetaDirDeg : dip direction in sexagersimal degrees;
        zetaDeg : dip in sezagesimal degrees.
    '''
    deltaDeg =2*(45 -180/math.pi *math.atan(rp /R))
```

```
    zetaDeg =90 -deltaDeg
    zetaDirDeg =(deltaDir +180) % 360
    return zetaDirDeg, zetaDeg
```

Luego procedemos a hacer las lecturas de las variables r_p y δ_{dir} para cada polo en cada sitio. La variable R se mide una vez. El Cuadro A.1 muestra los valores leídos de r_p y δ_{dir} para R constante igual a 82 mm.

Cuadro A.1 Medidas directas de r_p y δ_{dir}, sitios de falla 1 a 4 en el mismo orden.

Planos, falla 1	r_p en mm	δ_{dir} en °
1	41.6	239
2	67.1	140
3	10.5	014
4	80.0	118

Planos, falla 1	r_p en mm	δ_{dir} en °
1	54.0	312
2	58.1	164
3	78.6	180
4	78.6	214

Planos, falla 1	r_p en mm	δ_{dir} en °
1	41.6	239
2	67.1	140
3	10.5	014
4	80.0	118

Planos, falla 1	r_p en mm	δ_{dir} en °
1	51.0	157
2	67.1	242
3	33.1	346
4	67.1	024

Luego se hace correr la función para cada punto. Por ejemplo, para los planos del sitio uno.

```
print 'Site 1'
R =82.; k =0
rp =[ 4.16, 6.71, 1.05, 8 ]
deltaDir =[ 239, 140, 14, 118 ]

rp =[x*10 for x in rp]
for k in range(0,len(rp)):
    zetaDirDeg, zetaDeg =obtndipdirdipfromgraph( R, rp[k], deltaDir[k] )
    print 'Pole %i : %.2f \\ %.1f' %(k+1, zetaDirDeg, zetaDeg)
```

Finalmente el Cuadro A.2 muestra los valores de dirección de buzamiento y buzamiento de todos los planos en los cuatro sitios.

□

Cuadro A.2 Orientaciones de los planos, sitios de falla 1 a 4 en el mismo orden.

Planos, falla 1	Dir. de buz. y buzamiento
1	059\ 55
2	320\ 80
3	194\ 15
4	298\ 90

Planos, falla 2	Dir. de buz. y buzamiento
1	132\ 68
2	344\ 72
3	000\ 89
4	034\ 89

Planos, falla 3	Dir. de buz. y buzamiento
1	313\ 85
2	066\ 27
3	222\ 60
4	052\ 82

Planos, falla 4	Dir. de buz. y buzamiento
1	337\ 65
2	062\ 80
3	166\ 45
4	204\ 80

Índice alfabético

aglomerante, 108
algoritmo genético, 52
análisis probabilista, 115
Andes, 10

caída de rocas, 94, 100
carga sísmica, 39
cinemática, 68, 81, 97
coeficiente de restitución, 106
cohesión, 18
criterio de ruptura, 16, 75

distribución de frecuencia, 127
dovela, 42

factor de seguridad, 2, 71
flujo, 34
flujo anisóstropo, 37
funciones de distribución, 120

GSI, 13, 93

método de equilibrio límite, 42, 71
método de Monte Carlo, 116, 128

presión intersticial, 4, 78, 85

red esterográfica, 69
resistencia corte, 17
ruptura, 25, 66

toppling, 86

La estabilidad de taludes naturales y construidos se ha convertido en una de las mayores preocupaciones de las autoridades municipales y departamentales, y en la actividad más solicitada a resolver por los ingenieros geotecnistas.

Un abordaje clásico, simplista, rápido y económico del análisis de estabilidad de un talud es todavía una inicial alternativa para una posterior programación de proyectos geotécnicos más refinados y sofisticados. Pero este tipo de análisis inicial no sería en la actualidad tan útil si no se tuviera herramientas expeditas de cálculo como son los programas, rutinas y funciones desarrollados en código abierto.

De este modo, el presente libro pretende dar al lector las capacidades de análisis de equilibrio límite clásico en dos dimensiones en rocas y suelos a través de la solución de problemas y cálculos numéricos con un lenguaje de programación intérprete y de prototipaje muy bueno como lo es Matlab. Esto desarrollará mayores aptitudes, destrezas e independencia de análisis en situaciones particulares y poco comunes que se tiene muy a menudo en la práctica de análisis de estabilidad de taludes. Todos los listados de los códigos, funciones nuevas aquí desarrollados son libres para el uso, según los términos de la licencia abierta BSD.

Ludger O. Suárez-Burgoa es doctor en geotécnia de la Universidad de Brasilia (UnB) con maestría en ingeniería geotécnica de la Universidad Nacional de Colombia (UNAL) y graduado como ingeniero civil de la Universidad Mayor de San Andrés de Bolivia (UMSA). En la actualidad es Profesor Asistente en dedicación exclusiva del Departamento de Ingeniería Civil de la Facultad de Minas de la UNAL en Medellín. Desarrolló actividades como consultor e investigador por más de quince años en el campo de la geotecnia civil y minera en Bolivia, Chile, Brasil y Colombia, con énfasis en la mecánica de rocas. Escribió un libro sobre descripción del macizo rocoso; más de treinta artículos científicos relacionados con la mecánica de suelos y rocas, presentados en diferentes congresos y revistas. Actualmente es desarrollador de códigos en lenguajes intérpretes, tales como MATLAB® y Python3® en temas relacionados a la geología aplicada y geotecnia. Es director del semillero de investigación en geología matemática, parte del grupo de investigación de geotecnia del Departamento de Ingeniería Civil.